



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CRISTIANE TEREZINHA CARDOSO

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO NA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

CURITIBA

2019

CRISTIANE TEREZINHA CARDOSO

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO NA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Roges
Teixeira Góes

CURITIBA
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de
Bibliotecas/UFPR-Biblioteca do Campus Rebouças
Maria Teresa Alves Gonzati, CRB 9/1584
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cardoso, Cristiane Terezinha.

A representação gráfica como recurso didático na educação
matemática para a resolução de problemas aritméticos / Cristiane
Terezinha Cardoso. – Curitiba, 2019.
133 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Setor de
Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação.
Orientador: Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aritmética – Problemas,
questões, exercícios. 3. Representação gráfica. 4. Ensino fundamental.
5. Escolas públicas – Curitiba (PR). I. Título. II. Universidade Federal do
Paraná.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO: TEORIA E
PRÁTICA DE ENSINO - 40001016080P7

TERMO DE APROVAÇÃO

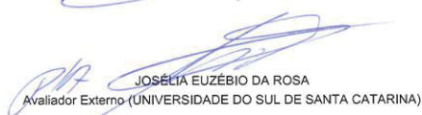
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO: TEORIA E PRÁTICA DE ENSINO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado Profissional de **CRISTIANE TEREZINHA CARDOSO**, intitulada: **A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS**, sob orientação do Prof. Dr. ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 09 de Outubro de 2019.


ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES
Presidente da Banca Examinadora


MARIA LUCIA PANOSSIAN
Avaliador Externo (null)


JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA)


ADRIANA VAZ
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO: TEORIA E
PRÁTICA DE ENSINO - 40001016080P7

ATA Nº 119


**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DISSERTAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM EDUCAÇÃO: TEORIA E PRÁTICA DE ENSINO.**

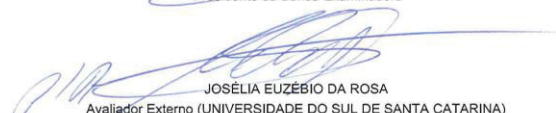
No dia nove de outubro de dois mil e dezenove às 09:00 horas, na sala 219, Campus Rebouças do Setor de EDUCAÇÃO da Universidade Federal do Paraná, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa da dissertação da mestranda **CRISTIANE TEREZINHA CARDOSO**, intitulada : **A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS**, sob orientação do Prof. Dr. ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná em EDUCAÇÃO: TEORIA E PRÁTICA DE ENSINO foi constituída pelos seguintes Membros: ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), MARIA LUCIA PANOSSIAN (null), JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA (UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA), ADRIANA VAZ (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela Aprovação. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga do título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Observações: Atender as considerações dos membros da
Banca.

Curitiba, 09 de Outubro de 2019.


ANDERSON ROGES TEIXEIRA GOES
Presidente da Banca Examinadora


MARIA LUCIA PANOSSIAN
Avaliador Externo (null)


JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA)


ADRIANA VAZ
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico esta dissertação aos meus pais, Suzana e Julio, que com muito carinho e apoio, ajudaram a realizar mais uma conquista em minha vida!

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à Santíssima Trindade e a Nossa Senhora Aparecida, na qual tenho muita fé e gratidão, por estarem presente em todas as etapas do Mestrado. Na qual sempre deposito toda minha confiança!

Quero agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes por sua dedicação e conhecimento para juntos escrevermos esta dissertação!

Quero agradecer à banca examinadora: Prof.^a Dr.^a Josélia Euzébio da Rosa, Prof.^a Dr.^a Maria Lúcia Panossian e a Prof.^a Dr.^a Adriana Vaz no momento da qualificação, nas indicações de leituras e contribuições para o desenvolvimento desta pesquisa!

Quero agradecer aos meus pais, Suzana e Julio, que me apoiaram em todas as etapas, comemoraram minha entrada no curso e me ajudaram em vários momentos para a conclusão do Mestrado! Muito obrigada mesmo!!

Quero agradecer aos meus irmãos, Julio e Adriane, pelo carinho, atenção e ajuda de vocês! Quero agradecer aos meus familiares pela compreensão da minha ausência em algumas de nossas reuniões!

Quero agradecer às amigas Izabel e Márcia, pela amizade e pelos momentos nos quais compartilhamos preocupações, certezas e risadas!

Quero agradecer à amiga Heliza, por poder acompanhar sua carreira acadêmica, sua defesa no Mestrado e por ter sido um exemplo para mim!

Quero agradecer à Universidade Federal do Paraná, aos professores e colegas ao compartilharem seus conhecimentos!

Quero agradecer aos professores e doutores Rossano, Anderson e Núria, que fizeram parte da banca de entrevista do Mestrado.

Quero agradecer à amiga Luciana pelo apoio, dicas e conversas.

Quero agradecer à Secretaria Municipal de Educação de Curitiba, pela liberação e oportunidade em desenvolver a pesquisa com os estudantes do 6º ano.

Quero agradecer à professora Charlene e ao professor Gerson que disponibilizaram suas aulas para o desenvolvimento da pesquisa em suas turmas de 6º ano.

Quero agradecer à professora Neusa e à professora Vanessa pelo apoio em algumas aulas da aplicação da pesquisa!

Quero agradecer aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental que aceitaram participar da pesquisa!

Quero agradecer à professora Clarice por sua dedicação, carinho e de estar sempre disposta a ajudar!

Quero agradecer ao professor Gilberto por seus conhecimentos e livros de História que contribuíram para esta pesquisa!

Quero agradecer à professora Silvana pela sua ajuda no início das aulas do Mestrado!

Quero agradecer aos professores, à equipe pedagógica e administrativa que ajudaram e aceitaram o desenvolvimento da pesquisa na escola!

Enfim, todos foram partes importantes que compõem o todo!

“Uma imagem vale mais do
que mil palavras”
Confúcio

RESUMO

O presente estudo insere-se na linha de pesquisa Teorias e Práticas de Ensino na Educação Básica do Programa de Pós-graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino da Universidade Federal do Paraná. Tem como objetivo analisar de que maneira a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos. Participaram deste estudo 160 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, dos quais 124 foram os participantes mediante autorizações conforme previsto pelo Comitê de Ética da Saúde da UFPR. A pesquisa de caráter qualitativo foi realizada em uma Escola Municipal de Curitiba/PR em três etapas. Como instrumentos de estudo foram utilizados: avaliação diagnóstica inicial, sequência de tarefas de estudo, avaliação diagnóstica final, áudio e fotos. Com base na tabulação dos resultados da avaliação diagnóstica inicial desenvolveu-se a sequência de tarefas de estudo utilizando o material manipulável para transformar as informações das partes que o constituem em representação gráfica. Os materiais manipuláveis usados foram o Cuisenaire, tangram, régua e o geoplano. A sequência de tarefas de estudo foi elaborada com base nas ações de estudo do Ensino Desenvolvimental, principalmente em relação à modelação das quantidades do objeto para serem escritas de modo literal na constituição das quantidades da operação. Verificou-se na avaliação diagnóstica inicial a baixa quantidade de representações, como desenhos ou esquemas, pelo participante para organizar as informações do problema, na qual o ajudasse a encontrar uma maneira de resolver. Após a aplicação da sequência de tarefas de estudo, a maioria dos participantes passaram a utilizar a representação gráfica na avaliação diagnóstica final como forma de organizar os dados do problema na compreensão da relação todo-partes para identificar a operação correta, mas também, como modo de resolvê-lo a partir do cálculo mental abstendo-se em apresentar o algoritmo usual. Constatou-se a grande aceitação dos participantes em utilizar a representação gráfica na avaliação diagnóstica final. Foi um recurso que os participantes do 6º ano se apropriaram para resolver os problemas aritméticos, analisando a função do número apresentado para a escolha de operação e, também como único meio utilizando o cálculo mental por decomposição. O uso da representação gráfica foi uma maneira inovadora e diferente do padrão utilizado em sala de aula. Sendo assim, um recurso que auxilia no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos dos conceitos para a resolução dos problemas aritméticos.

Palavras-chave: Formação Docente. Representação Gráfica. Problemas Aritméticos. Matemática.

ABSTRACT

This study is part of the research line: teaching theories and practices in basic education; Graduate Program in Education: Theory and Teaching Practice of the Federal University of Paraná. It aims to analyze how graphical representation can be a didactic resource for solving arithmetic problems. The study included 160 students from the 6th grade of elementary school Final Years, of which 124 were the participants with authorizations as provided by the UFPR Health Ethics Committee. The qualitative research was conducted in a Municipal School of Curitiba / PR in three stages. The study tools used were: initial diagnostic evaluation, sequence of study tasks, final diagnostic evaluation, audio and photo. Based on the tabulation of the results of the initial diagnostic evaluation, the study task sequence was developed using the manageable material to transform the information of its constituent parts into a graphical representation. The manageable materials used were: Cuisenaire material, tangram, ruler and geoplan. The sequence of study tasks was elaborated based on the study actions of the Developmental Teaching, mainly in relation to the modeling of the object quantities to be written literally in the constitution of the operation quantities. In the initial diagnostic evaluation, the participants had a low amount of representations, such as drawings or diagrams, to organize the problem information, which would help them to find a way to solve it. After applying the study task sequence, most participants began to use graphing for final diagnostic evaluation as a way to organize the problem data into understanding the whole-parts relationship to identify correct operation, but also as a way of solving it from mental calculation by refraining from presenting the usual algorithm. It was noted the great acceptance of the participants to use the graphic representation in the final diagnostic evaluation. It was a resource that the 6th grade participants appropriated to solve the arithmetic problems, analyzing the function of the number presented for the choice of operation and also as the only means using the decomposition mental calculation. The use of graphical representation was an innovative and different way from the standard used in the classroom. Thus, a resource that assists in the teaching-learning process of the contents of concepts for solving arithmetic problems.

Keywords: Teacher Education. Graphic representation. Arithmetic problems. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA1– RESPOSTA CORRETA DA TAREFA CORRESPONDENTE ÀS AÇÕES DE CONTROLE E AVALIAÇÃO.....	48
FIGURA 2 - COMPARAÇÃO DAS PARTES-TODO E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.....	48
FIGURA 3 - AS TRÊS TRANSFORMAÇÕES DO MODELO ABSTRATO DA RELAÇÃO UNIVERSAL.....	49
FIGURA 4 - IDENTIFICAÇÃO DO ESQUEMA QUE REPRESENTA O PROBLEMA.....	50
FIGURA 5 - MATERIAL CUISENAIRE.....	51
FIGURA 6 - KIT DO MATERIAL CUISENAIRE PARA OS PARTICIPANTES.....	52
FIGURA 7 - ESCALA DE CORES E SUAS RESPECTIVAS LETRAS.....	53
FIGURA 8 - OBJETOS A SEREM COMPARADOS.....	54
FIGURA 9 - OBTENÇÃO DA OUTRA PARTE DA RELAÇÃO PARTES-TODO.....	54
FIGURA 10 - TRANSFORMAR O TODO EM PARTES IGUAIS.....	55
FIGURA 11 - OBTENÇÃO DO TODO A PARTIR DAS PARTES.....	55
FIGURA 12- RELAÇÃO PARTES-TODO.....	56
FIGURA 13 - FORMAÇÃO DO TODO EM DUAS PARTES DIFERENTES.....	56
FIGURA 14 - REPRESENTAÇÃO DO TODO EM PARTES DIFERENTES.....	56
FIGURA 15 - TANGRAM.....	57
FIGURA 16 - TAREFA 1 - DIFERENTES COMPOSIÇÕES COM AS MESMAS PARTES.....	58
FIGURA 17 - COMPOSIÇÃO DO TOTAL EM PARTES IGUAIS.....	59
FIGURA 18 - COMPOSIÇÃO DE UMA REGIÃO POLIGONAL POR DIFERENTES REGIÕES POLIGONAIS.....	59
FIGURA 19 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FORMA OBJETAL E SUAS ANÁLISES ALGÉBRICAS.....	60
FIGURA 20 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E ANÁLISES DA FORMA OBJETAL.....	60
FIGURA 21 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FORMA OBJETAL.....	60
FIGURA 22 - MODELO UNIVERSAL DA COMPOSIÇÃO DAS REGIÕES POLIGONAIS DO TANGRAM E SUAS PROPRIEDADES.....	61
FIGURA 23 - PARTES NUMÉRICAS DA GRANDEZA QUE COMPÕE O TODO.....	62
FIGURA 24 - MODELAGEM UNIVERSAL PARA A CONTAGEM DAS MEDIDAS.....	62

FIGURA 25 - COMPOSIÇÃO DAS PARTES E O TODO.	63
FIGURA 26 - GEOPLANO	63
FIGURA 27 - EXEMPLO DO TODO FORMADO POR SEGMENTOS DE RETAS NA FORMA HORIZONTAL E/OU VERTICAL.	64
FIGURA 28 - REPRESENTAÇÃO DO TODO POR DUAS UNIDADES DE MEDIDA DIFERENTES.	64
FIGURA 29 - IDENTIFICAÇÃO DAS UNIDADES DE MEDIDAS NA REGIÃO QUADRADA.....	66
FIGURA 30 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E17H - QUESTÃO 1.....	75
FIGURA 31 - COMPARAÇÃO E COMPOSIÇÃO DAS BARRINHAS DO MATERIAL CUISENAIRE	75
FIGURA 32 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a,c) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 3.....	77
FIGURA 33 - MATERIAL CUISENAIRE: TODO SEPARADO EM PARTES IGUAIS	79
FIGURA 34 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 8.....	80
FIGURA 35 - MATERIAL CUISENAIRE: O TODO FORMADO POR PARTES IGUAIS	81
FIGURA 36 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (A) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 11	82
FIGURA 37 - COMPOSIÇÃO DO TODO POR PARTES DIFERENTES	83
FIGURA 38 - COMBINAÇÃO DE PARTES PARA COMPOR O TOTAL.....	83
FIGURA 39 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 19.....	84
FIGURA 40 - SOBREPOSIÇÃO DO TODO COM AS PARTES	85
FIGURA 41 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 3	87
FIGURA 42 - DIVISÕES DO TODO EM PARTES IGUAIS.....	88
FIGURA 43 - DIVISÃO DO TODO EM PARTES IGUAIS E EQUIVALENTES.....	89
FIGURA 44 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 11	90
FIGURA 45 - COMPOSIÇÃO DO TODO EM PARTES DIFERENTES.....	91

FIGURA 46 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 12.....	92
FIGURA 47 - QUESTIONAMENTO SOBRE AS CONSTRUÇÕES E REPRESENTAÇÕES.....	92
FIGURA 48 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 2	93
FIGURA 49 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E17H - QUESTÃO 6.....	94
FIGURA 50 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 1.....	96
FIGURA 51 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 9	97
FIGURA 52 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 19.....	97
FIGURA 53 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 12	98
FIGURA 54 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 3.....	99
FIGURA 55 - EXEMPLOS DA TAREFA DE ESTUDO NA COMPOSIÇÃO DO TODO	101
FIGURA 56 - COMPOSIÇÃO DO TODO POR PARTES.....	102
FIGURA 57 - COMPOSIÇÃO DO TODO EM PARTES E IDENTIFICAÇÃO DA UNIDADE BÁSICA.....	103

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - TABULAÇÃO DA CORREÇÃO DAS AVALIAÇÕES DIAGNÓSTICAS .73	
TABELA 2 - TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE	86
TABELA 3 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO FINAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE	95
TABELA 4 - TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE	100
TABELA 5 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO INICIAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE	105
TABELA 6 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO FINAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE	106

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1- CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS.....	30
QUADRO 2 - RESULTADOS DAS PESQUISAS DA CAPES.....	38
QUADRO 3 - RESULTADO DAS PESQUISAS DA SCIELO	41
QUADRO 4 - CLASSIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES	47
QUADRO 5 - PROPRIEDADES	57
QUADRO 6 - COMPOSIÇÃO DO TODO POR DIFERENTES UNIDADES DE MEDIDA.....	65
QUADRO 7 - ESQUEMA DE SETAS: RELAÇÃO UNIVERSAL DA MULTIPLICAÇÃO.	66
QUADRO 8 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E ESQUEMA DA MULTIPLICAÇÃO SOBRE ÁREA DA REGIÃO QUADRADA.	66
QUADRO 9 - MODELAÇÃO UNIVERSAL DA ÁREA QUADRADA.....	67
QUADRO 10 – ELEMENTOS DE ANÁLISE ARTICULADAS COM AS AÇÕES DE DAVYDOV (1988).	70
QUADRO 11- TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE.....	72

SIGLA

BNCC - Base nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEUFPR - Comitê de Ética da Universidade Federal do Paraná

E.V.A. - Etil, Vinil e Acetato.

PP - Professora-pesquisadora

PPGCEM - Programa de Pós-Graduação em Ciência e Educação Matemática

PPGE:TPEn - Programa de Pós-Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino

PUC/GO - Pontifícia Universidade Católica de Goiás

RG - Representação Gráfica

SciELO - Scientific Electronic Library Online

SiBi/UFPR - Sistema de Biblioteca da Universidade Federal do Paraná

SINECT - Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia

UEM - Universidade Estadual de Maringá

UERJ - Universidade Estadual do Rio de Janeiro

UFPI - Universidade Federal do Piauí

UFPR - Universidade Federal do Paraná

UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

UNESC - Universidade do Extremo Sul Catarinense

UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	TRAJETÓRIAS PROFISSIONAL E ACADÊMICA	20
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivo geral	23
1.2.2	Objetivos específicos	23
1.3.	PROBLEMÁTICA E JUSTIFICATIVA.....	23
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	25
2	APORTE TEÓRICO	27
2.1.	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	27
2.2	AO PESQUISAR SE DESCOBREM NOVOS CAMINHOS	31
2.3	O ENSINO DESENVOLVIMENTAL	33
2.4	O QUE DIZEM AS PESQUISAS QUE UTILIZAM DAVYDOV EM SUA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	37
2.5	SÍNTESE DO APORTE TEÓRICO	43
3	METODOLOGIA.....	45
3.1	CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES	45
3.2	ELABORAÇÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL	46
3.3	ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE TAREFA DE ESTUDO	47
3.3.1	Material Cuisenaire	51
3.3.2	Tangram.....	57
3.3.3	Régua	61
3.3.4	Geoplano	63
3.3.5	Problemas com representação gráfica	67
4	RESULTADOS E ANÁLISES.....	69
4.1	ELEMENTOS DE ANÁLISE.....	69
4.2	PARTICIPANTES DA ANÁLISE	71
4.3	ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS DE UMA TAREFA DE ESTUDO	73
4.4	ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO MEDIADORA ENTRE AS INFORMAÇÕES DE UM PROBLEMA ARITMÉTICO AO CÁLCULO	87

4.5 ELEMENTODE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE TAREFAS PARTICULARES	95
4.6 ELEMENTODE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO PROCESSO DE ENSINO	100
4.7 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA APRENDIZAGEM	105
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	117
APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	119
APÊNDICE C - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL	121
APÊNDICE D – TAREFA DE ESTUDO – MATERIAL CUISENAIRE	123
APÊNDICE E - TAREFA DE ESTUDO – TANGRAM	125
APÊNDICE F - TAREFA DE ESTUDO – RÉGUA	127
APÊNDICE G - TAREFA DE ESTUDO - GEOPLANO E MALHA PONTILHADA .	129
APÊNDICE H - TAREFA DE ESTUDO - PROBLEMAS	131
APÊNDICE I - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL	133

1INTRODUÇÃO

Esta seção apresenta um recorte do histórico de vida profissional da pesquisadora. Nela se optou pela escrita em primeira pessoa do singular por ser fragmento do contexto de vida pessoal. Ainda, são apresentados os objetivos geral e específicos, a problematização e a justificativa.

1.1 TRAJETÓRIAS PROFISSIONAL E ACADÊMICA

Começo a descrição de minha trajetória acadêmica e profissional informando que toda minha formação educacional foi em instituições públicas, exceto uma das duas especializações, a qual foi realizada em ensino particular. Um ponto em comum nessas instituições foi o fato de que a maioria das aulas sempre ocorrem de maneira expositiva em que o professor é tido como o detentor do conhecimento e, sem aulas diferenciadas para melhorar a aprendizagem dos estudantes.

Foi no atual sétimo ano do ensino fundamental (sexta série) que tive dificuldades em determinados conteúdos. Ajudada pela família, compreendi mais os conteúdos de álgebra e passei a ajudar os colegas próximos. Disto surgiu minha escolha em ser professora. Para começar a concretizar esta decisão, realizei o curso de Magistério na mesma instituição do Ensino Fundamental na qual conclui meus estudos, no Instituto de Educação do Paraná Professor Erasmo Pilotto (IEPPEP), em Curitiba. Nessa época, a educação passava por novas diretrizes e bases no âmbito nacional com a Lei 9394/96 (BRASIL, 1996), que foram aplicadas quando estava no último ano do Magistério.

Dentre as disciplinas cursadas naquele período destaco as aulas de metodologias, especificamente a que havia a necessidade do uso de materiais prontos ou confeccionados pelas alunas do curso, para o planejamento das aulas com posterior aplicação nas atividades práticas de estágio supervisionado. Os materiais confeccionados eram para exemplificar o conteúdo abordado pelo professor e materiais manipuláveis para os estudantes. Neste período tive conhecimento de alguns materiais, como o material dourado, o disco de frações, o ábaco por varetas verticais com peças de encaixar, dentre outros.

Apesar dessa gama de materiais manipuláveis, pude verificar, durante os estágios supervisionados, o seu pouco uso nas aulas de matemática pelos

professores regentes. Isto tornava a aula expositiva e os estudantes tinham o uso do caderno e livro para resolverem as atividades, justificando minha afirmação do início dessa seção.

No ano seguinte à finalização do Magistério, em 1997, realizei o curso de Adicional em Educação Infantil, com duração de um ano na mesma instituição, no período noturno. No período diurno iniciei atividade profissional com turmas de 4º e 5º ano em uma escola particular de ensino fundamental.

No ano de 2001 ingressei no curso de Matemática na Universidade Federal do Paraná (UFPR). Durante o curso tive a oportunidade de participar do Projeto Licenciador, coordenado pela professora Elisângela Campos que abordava o tema funções exponenciais e logarítmicas por meio do uso de jogos. Com mais dois estudantes da graduação, estudamos os conteúdos abordados para desenvolver o jogo computacional que envolvesse as propriedades e gráficos. Nestas atividades percebi a importância das imagens para a compreensão dos conceitos pelos estudantes, o que se confirma quando Vaz e Silva (2016) nos apresentam que as imagens comunicam mensagens com códigos específicos ao leitor.

Finalizada a graduação em 2004, iniciei o curso de Especialização de Professores de Matemática no ano seguinte. Também, como na graduação e na especialização, os professores abordaram os conteúdos programados de maneira expositiva em suas aulas.

Nessa época em que cursava a especialização comecei a trabalhar em outra escola particular, agora como professora de Matemática com alunos de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, e na qual permaneço até o presente momento. Esta escola possui vários recursos, dentre eles, sala interativa com materiais diversificados para os professores de todas as áreas específicas.

Passados cinco anos, em 2010, comecei a lecionar na Rede Municipal de Curitiba, ao ingressar por concurso público para Docência II na área de Matemática. No primeiro ano assumi uma vaga provisória na Escola Municipal CAIC¹ Cândido Portinari, na Cidade Industrial de Curitiba e, no ano seguinte fui remanejada para a Escola Municipal Albert Schweitzer, onde estou até o presente momento. Esta

¹ Centro de Atenção Integral à Criança e ao Adolescente.

possui salas de aula e salas ambientes, dentre elas, a sala de matemática, a qual foi equipada com o auxílio da empresa Kraft².

Em 2012, iniciei uma segunda especialização em Ensino da Matemática, agora na Universidade Tuiuti do Paraná, em que as disciplinas possuíam abordagens específicas com maior número de aplicações em sala de aula com elaboração de materiais.

Analisando minha trajetória profissional, onde trabalhei com o Ensino Fundamental I e II, pude perceber as diferentes ações dos professores regentes em relação ao uso de recursos. Ao longo dos anos letivos (séries) ocorre a diminuição do uso de materiais para o ensino de Matemática.

Nesta trajetória como professora de Matemática venho percebendo a dificuldade dos estudantes em compreenderem o enunciado dos problemas para a sua resolução. Dificuldades de identificar a função do número como total, partes, diferença, identificar partes iguais, repetição de valor, cálculo simples e composto. Também percebo que, apesar de apresentarem algoritmos desenvolvidos corretamente, o cálculo esperado como solução do problema possui erro que em sua maioria é gerado pela falha na passagem da interpretação para o cálculo esperado com uma organização dos dados errônea.

Diante desta inquietude me propus a buscar qualificação com a finalidade de minimizar tais ocorrências e, para isto, cursei, em 2016, a disciplina de “Tecnologia Educacional e Leitura de Imagens”, como aluna especial, no Programa de Pós-graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino (PPGE:TPEn) da UFPR. No ano seguinte submeti projeto ao PPGE:TPEn/UFPR e fui selecionada para desenvolver a pesquisa com tema na representação gráfica como recurso didático para a resolução de problemas aritméticos.

No primeiro semestre do curso em 2017, cursei uma disciplina externa no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática na Universidade Federal do Paraná – PPGCEM, denominada “Educar com a Matemática”, ministradas pelas professoras Maria Lúcia Panossian e Luciane Mocrosky. Nesta disciplina tive o primeiro contato com a teoria Desenvolvimental de

² Kraft Foods, por meio do Programa Bom Vizinho, busca a melhoria da qualidade de vida das comunidades onde está presente, com foco nas iniciativas voltada à educação, nutrição, bem-estar e sustentabilidade. Em parceria com a Escola e direção, inauguraram o Laboratório de Matemática.

Davýdov, o que durante a revisão de literatura para a presente pesquisa me retornou como uma das bases teóricas que utilizaria nesta dissertação.

1.2 OBJETIVOS

Ao desenvolver este trabalho foram traçados os objetos descritos a seguir.

1.2.1 Objetivo geral

Analisar de que maneira a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos.

1.2.2 Objetivos específicos

- Esclarecer a conceituação sobre representação gráfica.
- Analisar na teoria do ensino desenvolvimental como a representação gráfica pode ser um recurso didático.
- Identificar nas pesquisas acadêmicas atuais brasileiras como está ocorrendo o ensino e aprendizado de matemática por meio da representação gráfica.
- Desenvolver e aplicar uma sequência de tarefas para resolução de problemas aritméticos em uma turma de 6º ano de uma escola pública.
- Discutir aspectos do uso de representação gráfica na resolução de problemas aritméticos.

1.3. PROBLEMÁTICA E JUSTIFICATIVA

É comumente verificado no 6º ano do Ensino Fundamental a dificuldade que os estudantes possuem em interpretar os enunciados para resolver os problemas. Alguns perguntam se a “conta é de mais ou de menos”, esperando que a professora forneça qual operação deve ser aplicada.

Ao acompanhar o estudante no desenvolvimento de seus exercícios é possível verificar a resolução de problemas com algoritmo correto, mas não a operação esperada. A interpretação não foi adequada em identificar os valores do

enunciado em: parte, total, diferença, separar em partes iguais, número que se repete, em um único cálculo ou mais ao problema.

Estas situações nos mostram que a proposta das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na área de Matemática, não está sendo atingida pelos estudantes. O fundamento principal desta disciplina é o letramento matemático:

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BNCC, 2018, p. 264).

O estudante precisa dominar a interpretação dos enunciados para organizar dados para a resolução de problemas. Para que isto aconteça, é necessário que o professor seja responsável em preparar aulas que favoreçam o desenvolvimento deles com aprendizagem significativa dos conteúdos de matemática.

Na busca de estratégias nas quais o estudante possa compreender os conceitos envolvidos nos conteúdos, Nacarato e Passos (2003) apresentam a importância da visualização da informação

A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante aos olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (NACARATO; PASSOS, 2003, p.78).

Vygotsky (1984) relata que o uso do desenho, como primeira forma de comunicação do ser humano, é visto claramente manifestado pelas crianças para representar algo, pois o desenhar é considerado como um estágio intermediário entre um pensamento e a sua representação escrita.

Tomando como fundamento a importância de usar desenhos para registrar uma informação e a função da visualização, temos o estudo de Góes (2013) sobre o Esboço de Conceituação de Expressão Gráfica que nos apresenta quais recursos didáticos visuais são possíveis de serem utilizados para desenvolver o letramento matemático dos estudantes.

Na busca de melhorar a aprendizagem deles, propõe-se representar graficamente, como recurso didático na interpretação do enunciado ao cálculo,

fazendo os estudantes visualizarem os conceitos e função dos números apresentados nos problemas para a resolução correta, juntamente com a Teoria Desenvolvidor de Davydov³ sobre a organização do ensino de conceitos de matemática.

Espera-se que esta proposta de estudo tenha significado para a aprendizagem dos estudantes e que possa ser um instrumento para os professores de matemática para melhorar o ensino. Também, que seja uma proposta para apresentar à Secretaria Municipal de Educação de Curitiba para a formação dos professores de Educação Básica e Fundamental do Ciclo I e II.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A estruturação do texto apresentado nesta pesquisa segue a seguinte organização: a primeira seção que denominamos de introdução, abordaremos uma parte significativa da apresentação pessoal da pesquisadora, o problema da pesquisa, os objetivos e a justificativa da pesquisa.

Na segunda seção, intitulada de aporte teórico, apresentamos a representação gráfica na sociedade desde seu surgimento como forma de registros e de sua linguagem; pesquisas que abordam este tema para a resolução de problemas aritméticos, e o conhecimento da teoria de Davýdov.

Na terceira seção temos a metodologia da pesquisa. Apresentamos os participantes da pesquisa, as avaliações diagnósticas – iniciais e finais – e a sequência de tarefas aplicadas com o uso de materiais manipuláveis e da representação gráfica.

Na quarta seção apresentamos a análise constituída de sete tópicos. No primeiro, discutiremos sobre como foram elaborados os elementos de análise. No segundo, como foram selecionados os cinco participantes para a análise. Na sequência, é apresentado cada um dos cinco elementos de análise, articulando os registros produzidos pelos participantes com as observações da professora-pesquisadora e o aporte teórico.

³ Escolhemos a grafia Davydov para esta dissertação uma vez que sua escrita aparece de maneiras diferentes nas obras: Davídov (1988) e Davýdov (1982).

Na última seção finalizaremos o trabalho com considerações finais, oportunizando reflexões sobre o uso da representação gráfica como recurso didático na organização do ensino de conceitos de problemas aritméticos.

2APORTE TEÓRICO

Esta seção é formada por quatro seções. Na primeira seção discorremos sobre a representação gráfica na sociedade, desde seu surgimento como forma de registros e de sua linguagem. Na segunda seção realizamos um levantamento das pesquisas findadas no período de 2014 – 2018 sobre o uso da representação gráfica na resolução de problemas aritméticos. Na terceira seção apresentamos o ensino desenvolvimental. Na quarta seção estão as pesquisas que utilizam a Teoria de Davydov.

2.1. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

O representar graficamente por desenhos e pinturas foi a primeira maneira que os homens pré-históricos fizeram seus registros, “uma mensagem com códigos específicos” (VAZ; SILVA, 2016, p. 17). Os homens pré-históricos utilizavam a arte como primeira forma de representação gráfica de seus acontecimentos registrando por meio de desenhos e pinturas nas paredes rochosas da caverna (GÓES; GÓES, 2017). Seus registros eram marcados por desenhos de animais, objetos ou símbolos, sendo as produções realizadas com terra, água, plantas ou amassando pedaços de rochas para fabricarem suas tintas. Em relação às cores, eram obtidas a partir da argila. (PERDRIZET, 1994).

Os desenhos elaborados por aqueles povos constituíram uma forma embrionária, universal e atemporal da expressão e comunicação de ideias (MARQUES; FLORES; SOUTO, 2017). Nas representações gráficas por desenhos não havia uma linguagem escrita, mas como afirma Dondis (2015), toda imagem transmite um texto que pode ser lido e analisado porque possui uma linguagem visual de uma gramática própria, em que vem ao encontro à proposta de Vaz e Silva (2016) de que o desenho transmite uma mensagem com objetivos.

Essa forma de representação ainda é utilizada atualmente, pois o “desenho é um processo de criação visual que tem propósito” (WONG, 2010, p. 41), que “nunca perdeu sua importância como meio de comunicação e de expressão [...] sendo indispensável na educação para a transmissão de ideias e materialização de conceitos” (GÓES; GÓES, 2018, p. 109).

Para Dondis (2015), o representar graficamente por um desenho é uma forma de linguagem, expressa por “elementos visuais que constituem a substância básica daquilo que vemos: o ponto, a linha, a forma, a direção, o tom, a cor, a textura, a dimensão, a escala e o movimento” (DONDIS, 2015, p. 51). Linguagem que a sociedade utiliza como “meio de armazenar e transmitir informações, veículo para o intercâmbio de ideias e meio para que a mente humana seja capaz de conceituar” (DONDIS, 2015, p. 9). Já Wong (2010, p. 152), apresenta o desenhar como uma composição completa em que “todos os elementos visuais de um desenho são entendidos, em conjunto, como forma, porém é mais comum que formatos claramente definidos sejam tomados como forma, as quais constituem uma composição”.

A composição é classificada por Wong (2010) como singular (constituída apenas por uma forma) ou plural (a forma é repetida e podem variar ligeiramente), ainda, “uma forma plural pode se tornar composta pelo acréscimo de um elemento que tem forma diferente” (WONG, 2010, p. 153).

Neste contexto, a representação gráfica pretendida nesta pesquisa é classificada como plural e composta, pois utiliza segmentos de retas de tamanhos iguais e diferentes, e o uso de arcos para a composição do desenho/imagem, constituindo uma forma de linguagem que transmite informações.

Qualquer acontecimento visual é uma forma com conteúdo, mas o conteúdo é extremamente influenciado pela importância das partes constitutivas, como a cor, o tom, a textura, a dimensão, a proporção e suas relações compositivas com o significado. (DONDIS, 2015, p. 22).

A representação gráfica composta por elementos na sua forma compositiva de segmentos de reta, de tamanhos iguais ou diferentes segue “princípios visuais da composição geométrica na compreensão do sistema clássico de proporções” (ELAM, 2010, p. 5), composição formada por divisões e subdivisões que ocorrem as proporções.

Vygotsky (1984) destaca a importância do desenho como estágio intermediário entre um pensamento e a sua representação escrita. Com isso, no processo de ensino e aprendizagem, o desenhar deve ser o estágio anterior ao desenvolvimento da linguagem escrita. Isto pelo fato que a criança faz uso de representações pictográficas, ou seja, o desenho como instrumento para representar

determinada situação e passa a dar significado da sua escrita simbólica (OLIVEIRA, 1995).

Com o passar dos anos, o desenho como forma de registro passou por transformações até a escrita atual, mas nem por isso deixou de ser importante para a sociedade, principalmente no campo educacional (GÓES; GÓES, 2018). Devido à importância das representações gráficas, há a constituição do campo de estudos Expressão Gráfica, que segundo Góes (2013),

[...] é um campo de estudo que utiliza elementos de desenhos, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. (GÓES, 2013, p. 20).

Na proposta de definição da autora, o uso de elementos como o desenho e imagens são importantes para o ensino e aprendizagem em diversas áreas, proporcionando visualmente o desenvolvimento de conceitos. Todavia, para o campo educacional, tem a “possibilidade de visualizar ou de representar o imaginário” (GÓES; GÓES, 2018, p. 107), porque “permitem a compreensão de conceitos, facilitando a comunicação entre educador e educando” (GÓES; GÓES, 2018, p. 108). Isto, talvez seja um dos motivos pelos quais os professores que ensinam matemática busquem utilizar “a maior variedade de recursos para que muitos conceitos, principalmente os abstratos, tenham alguma visualização ou representação que facilite sua compreensão” (GÓES; GÓES, 2018, p. 107).

Entre os elementos apresentados por Góes (2013) há o material manipulável, definido por Góes e Góes (2018) em “estáticos (que não permitem a modificação em sua forma) ou dinâmicos (que é permitida a modificação da forma, mas sem a modificação das propriedades, ou seja, daquilo que define o conceito a ser estudado)” (GÓES; GÓES, 2018, p. 112), que pode ser considerado como uma das tecnologias do ambiente escolar que podem gerar imagens reais ou imaginárias, bidimensionais ou tridimensionais. Nacarato (2004) também defende o uso de materiais concretos, também considerados manipuláveis, para a contribuição do desenvolvimento da visualização de conceitos.

Góes e Góes (2018) apresentam a classificação do material manipulável como estático ou dinâmico, com base em Januário (2008)(QUADRO1).

QUADRO 1- CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS.

Material Manipulável	Exemplos	
Estáticos	Instrumentos de trabalho	Quadro de giz, caderno, compasso, régua, esquadro, transferidor, entre outros.
	Ilustrações	Desenho, mural, gravura, filme, gráfico estatístico, mapa, entre outros.
	Análise	Modelos geométricos, jogos de tabuleiro, modelos de sólidos geométricos, entre outros.
Dinâmicos	Experimentais	Softwares de geometria dinâmica, aparelhos de revolução de sólidos, entre outros.
	Informativos	Revistas, livros didáticos ou paradidáticos, páginas de internet, jornais, entre outros.

FONTE: Januário (2008) adaptado pela autora (2019).

Os materiais mais comumente utilizados no processo de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática, segundo Góes e Góes (2018) são: material dourado, ábaco, maquete, jogos, tangram, disco de frações e régua de frações, geoplano, obras de arte e os modelos de sólidos geométricos.

Visualizar a informação com o uso de imagens e materiais manipuláveis desenvolve a compreensão na interpretação das informações e conceitos, como apresenta Nacarato e Passos (2013),

A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante aos olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78).

Com isso, a habilidade de pensar para transformar os conceitos abstratos em informações ocorre com o uso de imagens e materiais manipuláveis que utilizam formas. Wong (2010) considera forma como algo visível e a partir dela percebemos tudo que está em torno de nós classificando-a como tridimensional que pode ser visual ou tátil. Sendo assim, o material manipulável é uma forma de imagem tridimensional que pode ser real, concreta e manipulável. Lorenzato (2006) considera o material concreto como palpável, manipulável e com imagens gráficas, que devem “ampliar conceitos, à descoberta de propriedades, à percepção da necessidade de emprego de termos ou símbolos, à compreensão de algoritmos, enfim, aos objetivos matemáticos” (LORENZATO, 2006, p. 9). Descobertas de propriedades a partir de “princípios visuais da composição geométrica na

compreensão do sistema clássico de proporções” (ELAM, 2010, p. 5), as quais a visualização que a representação gráfica gera na identificação e classificação das partes do todo na resolução de problemas aritméticos.

Tendo essa compreensão de representação gráfica, que pode ser gerada por desenhos e materiais manipuláveis, transformando conceitos abstratos em informações, esta pesquisa busca utilizá-la no ensino de matemática, em especial na resolução de problemas aritméticos. Com isso, é necessário verificar como a representação gráfica é abordada em pesquisas que envolvem o processo de ensino e aprendizagem na resolução de problemas aritméticos para o 6º ano do ensino fundamental.

2.2 AO PESQUISAR SE DESCOBREM NOVOS CAMINHOS

Tomando a importância de utilizar a representação gráfica como linguagem visual para a formação de conceitos no processo de ensino e aprendizagem, foram realizadas buscas sobre o tema na área da matemática.

Em pesquisa originada dessa dissertação publicada no Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia - VI SINECT, os autores Cardoso e Góes (2018) constataam que há carência de trabalhos que abordem, especificamente, a questão da representação gráfica na resolução de problemas aritméticos para 6º ano no ensino fundamental. Parte do texto aqui apresentado são os resultados apresentados pelos autores que observaram estudos que utilizam a reta numérica e/ou esquemas para a obtenção da lei universal que rege determinada operação matemática.

O levantamento de pesquisas realizado por Cardoso e Góes (2018) iniciou com a definição do tema “resolução de problemas aritméticos por meio da representação gráfica”. Para isso foi consultada a base de dados do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), do Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Paraná (SiBi) e da Scientific Electronic Library Online (SciELO). Como filtros de pesquisas foram analisados os trabalhos desenvolvidos nos anos de 2014 a 2018 (buscando a atualidade dessas pesquisas, na ocasião), organizados os descritos em dois grupos:

- Grupo 1: representação gráfica; desenho; e representação.

- Grupo 2: operações aritméticas; quatro operações, adição; subtração; multiplicação; e divisão.

A busca ocorreu agrupando um elemento do Grupo 1 com um elemento do Grupo 2, totalizando 18 buscas (três descritores do Grupo 1 combinado com os seis descritores do Grupo 2). Cabe ressaltar que ao utilizar os descritores adição, subtração, multiplicação e divisão, esses foram associados ao descritor “matemática”. Ainda, foi selecionado o filtro da base da CAPES nas áreas de concentração educação, ensino e matemática⁴.

Com os trabalhos retornados pela base de dados houve uma leitura dos títulos e resumos das pesquisas encontradas para verificar se eles estavam relacionados ao tema de pesquisa.

Chama a atenção a pouca quantidade de trabalhos na área da matemática que envolve a representação gráfica, apenas a pesquisa de Galdino (2016) foi selecionada no período analisado. Em tal pesquisa, Galdino (2016) investiga o conhecimento matemático dos estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação. A autora apresenta o cálculo composto de abstrações, generalizações e conceitos, tendo como base a teoria histórico-cultural por Davydov, denominada de teoria do ensino desenvolvimental. Ainda, Galdino (2016) utiliza esquema construído por elementos que constituem a relação universal dos conceitos de multiplicação.

Com base nestes estudos tem-se em Davydov outro autor para fundamentar a presente pesquisa que busca analisar, durante o processo de intervenção pedagógica, como a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas. Em uma das ações da proposta do ensino desenvolvimental, ocorre a modelação da relação universal na forma objetivada, gráfica e literal, com o uso de representações gráficas com símbolos algébricos para constituir as partes e o todo. Teoria que se teve conhecimento com o estudo de Galdino (2016) e na realização da disciplina Educar com a Matemática, ministrada pelas professoras Maria Lúcia Panossian e Luciane Mocrosky, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática na UFPR.

⁴ Apesar da área de matemática não ser específica da educação e ensino, ela traz pesquisas desenvolvidas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT) que apresentam práticas ou estudos desenvolvidos por professores que ensinam matemática.

2.30 ENSINO DESENVOLVIMENTAL

O psicólogo bielorrusso Lev Semyonovich Vygotsky iniciou em 1920 suas pesquisas juntamente com outros psicólogos e pedagogos, que entre 1924 e 1934 formaram uma equipe para aprofundar seus estudos. Entre os estudiosos estavam Alexis Nikolaevich Leontiev e Alexander Romanovich Lúria, que contribuíram para formar a

[...] base teórica da psicologia histórico-cultural em relação a temas como: origem e desenvolvimento do psiquismo, processos intelectuais, emoções, consciência, atividade, linguagem, desenvolvimento humano e aprendizagem. (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 1).

Vygotsky apresenta em seus estudos o desenvolvimento psicológico humano no que diz respeito ao processo de apropriação da cultura mediante a comunicação com outras pessoas como atividade externa. “A internalização de formas culturais de comportamento envolve a reconstrução da atividade psicológica tendo como base as operações com signos” (VYGOTSKY, 1984, p. 41), onde adquirem significado e sentido.

As funções psíquicas superiores são desenvolvidas a partir das atividades coletivas e sociais no processo do conhecimento, bem como, a formação da aprendizagem pelo indivíduo se constitui nas relações subjetivas pelos saberes e instrumentos cognitivos. Entretanto, a educação e o ensino se juntam de maneira universal e fundamental ao desenvolvimento mental.

Tendo em vista que as atividades coletivas e sociais sofrem influência das pessoas com o meio no processo de transformação, Leontiev e seus seguidores, Rubinstein e Lúria, propuseram e desenvolveram a Teoria da Atividade como desdobramento da concepção histórico-cultural. Nessa teoria apresentam o conceito de atividade, ligado a filosofia marxista, como trabalho em que “é a principal mediação nas relações em que os sujeitos estabelecem com o mundo objetivo” (LIBÂNEO, 2004, p. 7).

Enquanto Vygotsky apresenta a teoria como a relação do sujeito e o objeto mediada por ferramentas, Leontiev (1992, p. 68) descreve a atividade como “processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfaz sua necessidade especial correspondente a ele”, bem como apresenta os elementos

estruturais da atividade que são: a necessidade, o motivo, a ação, a tarefa e a operação. Leontiev (1992) relata que a atividade surge de necessidades que impulsionam motivos orientados para um objeto que requer ações e as condições concretas da atividade que determinam as operações.

Seguindo a proposta da teoria histórico-cultural proposta por Vygotsky, Galperin formula a teoria do desenvolvimento psíquico por ações externas no surgimento e formação mentais por meio do ensino. Já Elkonin investiga o desenvolvimento humano e a aprendizagem escolar como fator essencial ao desenvolvimento psíquico.

Como seguidor da terceira geração da teoria de Vygotsky, o psicólogo Vasili Vasilievich Davydov aprofunda os ideais de Elkonin sobre a atividade de estudo em que o “objetivo é o domínio do conhecimento teórico, ou seja, o domínio de símbolos e instrumentos culturais disponíveis na sociedade, obtido pela aprendizagem de conhecimentos” (LIBÂNEO, 2004, p. 12), o conhecimento teórico-científico.

Vasily Vasilievich Davydov (1930 – 1998) foi um psicólogo russo que formulou a Teoria do Ensino Desenvolvimental juntamente com Elkonin, como precursores de Vygotsky, Luria e Leontiev da Teoria Histórico-Cultural para o Ensino. Assim, Davydov concorda com Leontiev sobre os elementos estruturais da atividade para o desenvolvimento do pensamento, mas acrescenta por primeiro o desejo antecedendo os demais elementos estruturais da atividade, já descritos: a necessidade, o motivo, a ação, a tarefa e a operação.

Acredito que o desejo deve ser considerado como um elemento da estrutura da atividade. [...] O termo desejo reproduz a verdadeira essência da questão: as emoções são inseparáveis de uma necessidade. [...] Os elementos são os seguintes: desejos, necessidades, emoções, tarefas, ações, motivos para as ações, meios usados para as ações, planos (perceptual, mnemônico, pensamento, criativo), todos se referindo à cognição e, também, à vontade. (DAVYDOV, 1999, p. 41).

Elementos estes que atuam na cognição dos sujeitos, principalmente na “atividade dos estudantes, na compreensão das disciplinas escolares e no envolvimento com o assunto estudado” (LIBÂNEO, 2004, p. 14).

Neste contexto, a escola é vista como o principal meio transformador do homem da sociedade socialista soviética e precisava “ensinar os estudantes a orientarem-se com autonomia e informação científica e em qualquer outra esfera do conhecimento” (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 315). Nela Davydov propõe um

ensino que supere o realizado em seu país num modo de organização de ensino em que o conteúdo e método, como unidade, estão relacionados à formação de conceitos matemáticos em nível científico (DAVYDOV, 1982).

Davydov (1988) contempla o conteúdo correspondente aos conceitos científicos relacionados ao movimento de ascensão do abstrato ao conhecimento concreto por um movimento geral-particular-singular orientado pelo universal. Com base no método do Materialismo Histórico e Dialético, os conceitos são formados por um movimento de abstração e generalização orientado do geral para o singular, mediado pelo particular e guiado pelo fio condutor da relação universal (ROSA, 2012).

Para o desenvolvimento do pensamento científico, a educação precisa de mudanças em sua concepção na formação do pensamento para além do ensino empírico, que promove a memorização. A teoria empírica utiliza generalizações por meio de comparação e separa por grupo de objetos que possuem propriedades repetidas, no qual bloqueia o desenvolvimento de conceitos. Teoria esta que atualmente, em nosso sistema brasileiro, organiza o ensino da matemática (ROSA, 2012; HOBOLD, 2014; GALDINO, 2016).

Com o anseio de mudanças do quadro educacional, a disciplina escolar “deve propiciar a formação, nos estudantes, de um nível mais elevado de consciência e pensamento” (DAVYDOV, 1988, p. 39). O ensino escolar deve oportunizar aos estudantes os conceitos científicos, aprimorar o pensamento teórico e possibilitar o domínio de novos conhecimentos científicos (DAVYDOV, 1982; DAVYDOV, 1988). Com base no desenvolvimento do pensamento teórico, Davydov (1982) apresenta que a escola deve oportunizar aos estudantes condições de apropriação de conceitos científicos, mediante um ensino que impulse o desenvolvimento mental. Para isto, propõe três contribuições de tarefa para a escola:

- 1) Integração entre os conteúdos científicos e o desenvolvimento dos processos de pensamento;
- 2) Necessária correspondência entre a análise de conteúdo e os motivos dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem; e
- 3) Fundamentação teórica dos professores no conteúdo da disciplina e também na sua didática. (DAVYDOV, 1988, p. 3).

A primeira tarefa se refere à base principal da teoria desenvolvimental que é o conteúdo, a partir do qual são elaborados os métodos e a organização do ensino. A segunda tarefa são os conteúdos que há dentro dos conceitos que são desenvolvidos a partir de tarefas compatíveis à aprendizagem do estudante. Na terceira tarefa cabe aos professores terem o domínio teórico para o desenvolvimento do ensinar.

Dentre os elementos estruturais da atividade, Davydov (1988) propõe ações a serem realizadas por meio de uma tarefa de estudo. Essas ações devem ser elaboradas com base num plano pedagógico do professor para seus estudantes:

- 1) Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado;
- 2) Modelação da relação universal na forma objetivada, gráfica e literal;
- 3) Transformação do modo da relação universal para o estudo de suas propriedades em forma pura;
- 4) Resolução de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
- 5) Controle da realização das ações anteriores;
- 6) Avaliação da apropriação do procedimento universal como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVYDOV, 1988, p. 181).

A realização sistemática das ações da tarefa de estudo, associada com a assimilação dos conhecimentos teóricos, desenvolve a consciência e o pensamento teórico (DAVYDOV, 1988). A primeira tarefa de estudo tem a intenção de obter a relação universal do objeto, constituindo o aspecto real dos dados transformados. Identificada a relação universal, a segunda tarefa é elaborar a modelação por uma representação que estabelece as características internas do objeto. Na tarefa seguinte ocorre o estudo das propriedades abstratas da relação universal. Na sequência, os estudantes resolvem várias tarefas específicas para consolidar o procedimento geral. As duas últimas tarefas correspondem ao processo de controle e avaliação das ações. É o momento de analisar o resultado de assimilação no que se refere ao procedimento geral da ação até o conceito.

Davydov (1988) explica a tarefa e as ações utilizando formação do conceito de número na primeira série, tomando como base o conceito de quantidade a partir das relações “igual”, “mais” e “menos”. Nela o estudante realizou a comparação das quantidades com a ajuda de formas literais: $a=b$, $a>b$, $a<b$. Com estas relações, conseguindo elaborar: $a + c > b$; $a = b - c$; $a + c = b + c$; entre outras.

Na primeira ação os estudantes realizam a transformação objetivada das quantidades em que determinam o caráter múltiplo da relação, a terceira medida para comparação. Após, ocorre a modelação na forma objetual, gráfica e com letras expressadas como auxílio de desenhos (na forma de segmentos). Transformado o modelo da relação, identifica-se o estudo das propriedades gerais dos números, constituindo-se um sistema de tarefas particulares para a concretização do procedimento geral, assimilando o conceito de número. Em consonância com a forma geral e as etapas anteriores, pode-se modificar a sua composição operacional em relação às condições particulares de execução.

Nas tarefas apresentadas anteriormente, observa-se o uso da modelação na forma objetual, gráfica e literal. Para a presente pesquisa, o material manipulável é o plano objetual para a obtenção de informações da relação interna (revelação dos dados) que o compõe, que em seguida são abstraídas por meio da representação gráfica e algébrica (literal). Davydov (1987) propõe a construção de um modelo abstrato de interpretação de problemas com o uso de entes geométricos para modelar as propriedades internas, como os segmentos de reta que constituem os elementos de um esquema representando a relação entre grandezas. Para Davydov (1988) é a transformação dos dados obtidos a partir da contemplação e representação das conexões internas da relação todo-partes que pode ser definido no modelo universal da operação.

Tendo a teoria de Davydov, que utiliza a modelação com o uso de representação gráfica com elementos algébricos e geométricos para a formação da relação universal da operação, decidiu-se ampliar a pesquisa apresentada por Cardoso e Góes (2018). Para isso, foi realizada uma busca em bases científicas para verificar como estão sendo realizadas as pesquisas à luz desta teoria.

2.4 O QUE DIZEM AS PESQUISAS QUE UTILIZAM DAVYDOV EM SUA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na busca de compreender o que trazem as pesquisas que se fundamentam em Davydov foi realizada a busca em três bases. A primeira foi o portal do Sistema de Biblioteca da Universidade Federal do Paraná (SIBi) por ser o local onde a pesquisa está sendo desenvolvida. Em seguida, foi no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, por serem pesquisas acadêmicas geradas de teses e

dissertações. Por fim, foi utilizada a plataforma SciELO para verificar demais pesquisas. Em cada base foi realizada duas buscas com os descritores a seguir, de maneira associada: “ensino desenvolvimental” e “matemática”; “Davydov” e “matemática”, no período de 2014 a 2018.

Com essas buscas pretende-se responder aos seguintes questionamentos, que são os norteadores das leituras e análise realizada neste momento:

- Quais conteúdos de matemática estão sendo contemplados por pesquisadores que se pautam pelo ensino desenvolvimental?
- Há o uso de representações gráficas nos processos encaminhados pelo ensino desenvolvimental?
- Como está ocorrendo o ensino e aprendizado de matemática por meio da representação gráfica, na visão dos pesquisadores?

Ao realizar a busca no portal SiBi não foram encontradas publicações no intervalo de tempo pesquisado (2014 - 2018).

Na base de dados da CAPES a busca retornou 17 pesquisas na área de Matemática para o Ensino Fundamental e uma referente ao curso de Licenciatura em Pedagogia, com a Teoria Desenvolvimental de Davydov, que possuem aplicações nos diversos conteúdos e conceitos matemáticos, apresentados no Quadro2.

QUADRO 2 - RESULTADOS DAS PESQUISAS DA CAPES

Autor	Síntese
SOUSA (2014)	Investiga a prática docente em Matemática com professoras dos anos iniciais do ensino fundamental relacionada ao estudo de Davydov sobre o conceito teórico do número. A investigação ocorreu com um grupo de cinco professoras dos anos iniciais de uma escola filantrópica de Teresina – PI.
HOBOLT (2014)	Analisa duas proposições de ensino, uma por autores brasileiros e outra por autores russos sobre o estudo de tabuada para os três primeiros anos do ensino fundamental. Foi considerada a coleção mais utilizada pelos professores das escolas estaduais dos municípios constituintes da 36ª Gerência Regional de Educação, com sede em Braço Norte, Santa Catarina. Quanto à proposição russa, utilizou o sistema de ensino Elkonin-Davydov.
BURIGO (2015)	Apresenta pesquisa bibliográfica sobre o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes em relação ao conceito de número real com base no modo davydoviano de organização do ensino para o conceito de número negativo para o 6º ano do ensino fundamental.

Continua

Continuação do Quadro 2

MOYA (2015)	Fez uma pesquisa bibliográfica sobre a organização de ensino de matemática no processo de ampliação do ensino fundamental de nove anos, em especial o 1º ano sobre o conceito de número. E que este conceito não existe sem as relações entre as grandezas sejam elas discretas ou contínuas.
SILVEIRA (2015)	Com base nos livros de Davydov: didático para o estudante e de orientação ao professor, desenvolveu seu estudo na operacionalização do sistema de numeração na especificidade de adição e subtração para o 2º ano do ensino fundamental.
ARAÚJO (2016)	Analisou as orientações para a organização do ensino de matemática na educação infantil, com fundamentos na perspectiva histórico-cultural de um município situado no sul do Estado de Santa Catarina, com o foco na pedagogia de projetos.
CRESTANI (2016)	Pesquisa de caráter bibliográfico que aborda o modo de organização de ensino do conceito de divisão relacionado com a multiplicação proposto por Davydov.
FREITAS (2016)	Em seu estudo bibliográfico apresenta a base universal do conceito de fração para o 5º ano do ensino fundamental, identificando as relações internas de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas.
GALDINO (2016)	Investigou o conhecimento matemático dos estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação. Utilizou esquema construído por elementos que constituem a relação universal dos conceitos de multiplicação, tendo como base a teoria histórico-cultural defendida (ou proposta) por Davydov.
SILVA (2016)	Abordou o conceito de fração propondo a formação dos conceitos relativos aos números racionais no 6º ano do ensino fundamental, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.
CRESTANI (2016)	Pesquisou o modo de organização de ensino do conceito de divisão relacionado com a multiplicação proposto por Davydov.
ALVES (2017)	Realizou o estudo referente ao pensamento teórico dos estudantes de 1º ano do ensino fundamental sobre adição e subtração com base nos livros de Davydov. Organizou por tarefas particulares que fundamenta a relação essencial todo-partes, no contexto teórico de número, entendido na relação entre grandezas.
MATOS (2017)	Apresentou o estudo sobre o modo de organização do ensino no contexto da Pedagogia referente à interpretação e resolução de problemas de subtração a partir dos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural.

Continua

Continuação do Quadro 2

SANTOS (2017)	Realizou sua pesquisa bibliográfica no conceito de fração, do ensino fundamental, para o modo de organização do ensino com base na lógica dialética.
ASSUMPÇÃO (2018)	Investigou como o eixo - números e operações - tem sido trabalhado com os escolares do 1° ao 5° ano, a fim de compreender que tipo de pensamento tem sido possível formar no educando, tendo a pesquisa de cunho bibliográfico e documental.
GUIMARÃES (2018)	Sua pesquisa bibliográfica está relacionada à organização do processo de ensino do conceito de número nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa envolveu duas escolas municipais de Goianira (GO) e duas professoras efetivas que atuam nos anos iniciais no ensino da matemática, a partir de entrevistas com elas e observações de suas aulas.
GUIMARÃES (2018)	A pesquisa realizada foi com ambiente propício para o desenvolvimento de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), no contexto de uma sala de aula com estudantes do 6° ano, com práticas de geometria.
SERCONEK (2018)	Analisou as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental para a organização do ensino de conceitos de área e de perímetro nos anos iniciais do Ensino Fundamental, realizando o experimento com uma turma do 4° ano.
SILVA (2018)	Buscou esclarecer como organizar o ensino de matemática, fundamentado na Teoria do Ensino Desenvolvimental, para ajudar os estudantes do curso de Licenciatura em Pedagogia a formar o pensamento teórico do conceito de fração.

FONTE: CAPES (2019), adaptado pela autora (2019).

Organizando por temas os trabalhos indicados no Quadro 2, temos: conceito de número (SOUSA, 2014; MOYA, 2015; ARAÚJO, 2016; GUIMARÃES, 2018), números e operações (ASSUMPÇÃO, 2018), subtração (MATOS, 2015), adição e subtração (SILVEIRA, 2015; ALVES, 2017), multiplicação (GALDINO, 2016), tabuada (HOBOLD, 2014), divisão (CRESTANI, 2016), números racionais (SILVA, 2016), fração (FREITAS, 2016; SANTOS, 2017; SILVA, 2018), números negativos (BURIGO, 2015), área e perímetro (SECONECK, 2018), geometria (GUIMARÃES, 2018), todos na tentativa de promover o processo ensino e aprendizagem.

Esses trabalhos são originados na Universidade Federal do Piauí – UFPI (SOUSA, 2014), Universidade do Sul de Santa Catarina – UNISUL (HOBOLT, 2014; SILVEIRA, 2015; GALDINO, 2016; MATOS, 2017; SANTOS, 2017), Universidade Estadual de Maringá – UEM (MOYA, 2015; ASSUMPÇÃO, 2018; SERCONEK, 2018), Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC (ARAÚJO, 2016;

BURIGO, 2016; CRESTANI, 2016; FREITAS, 2016; ALVES, 2017), Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ (SILVA, 2016), Universidade Federal de São Carlos – UFSCar (GUIMARÃES, 2018), Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC/GO (GUIMARÃES, 2018; SILVA, 2018).

Como o foco desta pesquisa é a resolução de problemas aritméticos com o uso da representação gráfica, tem-se que as pesquisas com maior consonância são relacionadas à adição e subtração (MATOS, 2015; SILVEIRA, 2015; ALVES, 2017), multiplicação (GALDINO, 2016) e divisão (CRESTANI, 2016). Essas pesquisas apresentam discussões teóricas com base na teoria davydoviana para a compreensão científica dos conceitos estudados, passando pelo estudo objetual, gráfico e literal. De maneira geral, esses autores afirmam que o modo de organização do ensino para promover o pensamento teórico dos estudantes é a partir de tarefas⁵ particulares para o conceito com base na relação entre grandezas. As tarefas apresentam apropriações articuladas de significações aritméticas, geométricas e algébricas que são apresentadas a partir da relação do objeto a ser transformado em imagens mediadas pela representação gráfica para a literal.

A terceira busca em base de dados teve a finalidade de verificar trabalhos que não são oriundos de teses e dissertações, mas que geralmente são produzidos no ambiente acadêmico. Com isso, buscou-se trabalhos no banco de dados da SciELO, e foram encontrados quatro trabalhos, sendo eles, Vaz e Pereira (2017), Rosa e Hobold (2017), Rosa, Damázio e Silveira (2014) e Libâneo (2015), sendo que não foram encontrados trabalhos no ano de 2018 (QUADRO 3).

QUADRO 3 - RESULTADO DAS PESQUISAS DA SCIELO

Autor	Síntese
ROSA; DAMÁZIO; SILVEIRA (2014)	Investigam o movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores ao proporem o ensino do Sistema de Numeração no 2º ano do Ensino Fundamental. As análises permitiram revelar as relações entre o geral, universal, singular e particular, além da consequente unidade entre o lógico e o histórico.

Continua

⁵“Tarefa de estudo é desenvolver nos estudantes meios de análises para resolvê-las sobre a base de abstrações e generalizações teóricas” (GALDINO, 2016, p. 60).

Continuação do Quadro 3

LIBÂNEO (2015)	Discute o problema da dissociação e do paralelismo entre o disciplinar e o pedagógico. Argumenta sobre o potencial da teoria davydoviana para a compreensão da necessária conexão entre didática, didáticas específicas e metodologias de ensino assegurando a interpenetração entre o conhecimento disciplinar e o conhecimento pedagógico.
HOBOLD; ROSA (2017)	Investigam o modelo da relação essencial da tabuada, o que possibilitou rever os elementos que constituem a essência da tabuada e como estes se relacionam e conformam o modelo universal em um sistema de representações objetal, gráfica e literal.
VAZ; PEREIRA (2017)	Elaboram e aplicam uma história em quadrinhos para estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, com base na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, com o conteúdo de volume de sólidos geométricos.

FONTE: A autora (2019).

Organizando por temas os trabalhos indicados no Quadro 3, tem-se volume de sólido geométrico (VAZ; PEREIRA, 2017), tabuada (HOBOLD; ROSA, 2017), sistema de numeração (ROSA; DAMÁZIO; SILVEIRA, 2014) e didática (LIBÂNEO, 2015). Todos os estudos apresentaram a finalidade de promover o processo de ensino e aprendizagem no desenvolvimento de conceitos fundamentais da matemática.

As buscas realizadas nas bases de dados, sobre o ensino desenvolvimental no período de 2014 a 2018, nos forneceram informações quanto a assuntos contemplados de matemática e ao ano que se refere ao ensino fundamental. Foram 22 pesquisas retornadas pelas bases, sendo: uma da Educação Infantil, 16 dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, duas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e três na Formação de Professores. Com isso é possível responder às questões norteadoras dessa busca, que se encontram no início dessa subseção.

Em relação aos conteúdos que estão sendo contemplados pelo ensino desenvolvimental encontrados nas pesquisas no período de 2014 a 2018 nas bases de dados foi possível verificar nove pesquisas que envolvem o conceito de número, 11 pesquisas que envolvem as operações e duas pesquisas que envolvem geometria.

A maior quantidade de estudos desenvolvidos relaciona-se aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e o conceito de número. Também são notáveis os estudos envolvendo o conceito das operações fundamentais com base na grandeza para obter a essência da relação universal do conceito estudado a partir do processo de

abstração e generalização em que se utiliza representação gráfica com elementos algébricos na modelação.

Em relação ao uso da representação gráfica, os estudos apresentados nas pesquisas descritas utilizam esquemas e representações gráficas com elementos algébricos que orientam o ensino e a aprendizagem de conceitos organizados geometricamente, gerando informações sobre as partes e o todo. Todas as pesquisas utilizam a relação objetual, gráfica e algébrica para o desenvolvimento do pensamento teórico dos conceitos abordados. Em relação à proposta de estudo desta pesquisa, em representar graficamente os dados de um problema, Alves (2017) apresenta tarefas para o conceito de adição e subtração. Dentre essas tarefas, foi utilizado o problema aritmético como objetual para ser articulada por esquema, que para a presente pesquisa é entendida como representação gráfica. Na representação gráfica (esquema) do problema, é necessário identificar todas as partes para a indicação da operação necessária.

2.5 SÍNTESE DO APORTE TEÓRICO

Ao concluir o aporte teórico foi possível perceber que há pouca pesquisa específica no uso da representação gráfica no ensino da matemática, como apontado por Cardoso e Góes (2018), em especial a resolução de problemas aritméticos, que é o foco da pesquisa.

Ao encontrar a pesquisa de Galdino (2016) tem-se a Teoria Histórico-Cultural por Davydov, também conhecida por Teoria Desenvolvimental, com ênfase no desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes sobre o conceito de multiplicação que é composto de abstrações, generalizações e conceitos. Ela utiliza representações gráficas elaboradas por esquemas, segmentos de retas, arcos e letras, como forma compositiva dos elementos da relação universal da lei da multiplicação e divisão.

Tendo a indicação da teoria de Davydov, foi possível verificar que 22 pesquisadores elaboraram seus estudos em diversos conteúdos matemáticos com o objetivo de desenvolver o pensamento teórico dos estudantes em relação ao assunto estudado.

Assim, essa pesquisa utiliza a Teoria de Davydov para o estudo da resolução de problemas aritméticos com o uso da representação gráfica como elemento de

estudo, tendo como recursos (ou instrumentos) a interpretação, a organização dos dados na forma de representação gráfica e a resolução, com estudantes de 6º ano de uma escola pública de Curitiba, sendo a metodologia da pesquisa apresentada no próximo capítulo.

3 METODOLOGIA

Esta seção descreve os quatro momentos da pesquisa. O primeiro momento é a fase de caracterização dos participantes. O segundo foi a elaboração e aplicação da avaliação diagnóstica inicial. No terceiro, são descritos os materiais manipuláveis utilizados e a sequência de tarefas de estudo aplicadas com o uso da representação gráfica dos dados obtidos. No último momento apresentamos a avaliação diagnóstica final.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

No primeiro momento da pesquisa foi realizada a caracterização dos participantes de uma escola municipal de Curitiba, com turmas de 6º ao 9º ano, nos períodos da manhã e da tarde. A escola possui quinze salas de aula, sete salas ambientes (Biblioteca, Laboratório de Ciências, Matemática, História/Geografia, Informática, Inglês e Artes) e uma quadra coberta.

Por ser um estudo que envolve problemas aritméticos e que faz parte da grade curricular de Matemática para o ensino fundamental, a pesquisa foi realizada com as cinco turmas de sexto ano, num total de 160 estudantes. O motivo de escolher todas as turmas se deveu ao fato de proporcionar a todos os recursos didáticos utilizados nessa pesquisa. No entanto, a análise dos resultados não é realizada com todos os participantes, pois essa pesquisa trata de uma abordagem qualitativa e um grande número de participantes para a análise poderia inviabilizar os resultados. Assim, o critério de seleção dos participantes é descrito mais adiante no texto, no momento oportuno.

Esses estudantes são provenientes de cinco turmas do período da tarde, tendo um professor regente responsável para as turmas D, E, F; outro professor para as turmas G e H.

Aos 160 estudantes e seus responsáveis foi explicado o estudo e solicitada a autorização por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE A) e do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE B), como prevê o projeto apresentado ao Comitê de Ética da Universidade Federal do Paraná (CEUFPR). Destes, 124 estudantes foram autorizados a participar. Cabe ressaltar, como prevê o projeto aprovado no CEUFPR, que os estudantes que não entregaram

as autorizações participaram de todas as etapas da pesquisa por se tratar de conteúdo curricular da aprendizagem, mas os dados desses estudantes foram excluídos das análises desta pesquisa, bem como, suas imagens, falas e atitudes, sendo esse um primeiro critério de exclusão de material para análise.

Um dos itens apresentado ao CEUFPR foi o de preservar o nome de todos os estudantes e participantes. Para isso, foi elaborado um código para que todos colassem na agenda ou caderno de matemática para sua identificação nas tarefas. Esse código é composto de quatro dígitos, como por exemplo, E05T, em que E significa estudante, 05 um número que representa uma lista aleatória de estudantes de uma turma e T a nomenclatura da turma à qual pertence (D, E, F, G ou H). Cabe ressaltar que a parte numérica não segue a sequência da chamada do professor regente para que seja preservada ainda mais sua identificação. Também, foi escolhida a letra E no código para que não houvesse a diferenciação de estudante (com ou sem autorização, sendo que apenas os pesquisadores tinham conhecimento dos estudantes não autorizados a participar da pesquisa).

Na escola em que foi aplicada a pesquisa, a professora-pesquisadora atua nas turmas de 6º ano como corregente, auxiliando os estudantes que precisavam de atendimento nos conteúdos estudados nas aulas de Matemática com seus professores regentes. Com esta vivência de sala de aula, foi possível observar as dificuldades básicas dos estudantes, como interpretação, organização dos dados para aplicação correta do algoritmo e, assim, elaborar a primeira etapa da pesquisa que consiste em uma avaliação diagnóstica inicial envolvendo a resolução de problemas aritméticos.

3.2 ELABORAÇÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

A resolução de problemas aritméticos está inserida desde o primeiro ano escolar no Currículo da Rede Municipal de Curitiba (2016). Espera-se que o estudante de 6º ano tenha domínio de interpretação e organização dos dados para o cálculo. Por meio da experiência docente da professora-pesquisadora é possível perceber que ainda há estudantes com dificuldades nestes assuntos/conteúdos.

Com o foco da pesquisa na resolução de problemas foi elaborada uma avaliação diagnóstica inicial (APÊNDICE C) com 20 questões envolvendo as quatro operações fundamentais, em cálculos simples (uma operação) e compostos (duas

ou mais operações). As questões foram desenvolvidas com base nos conteúdos escolares dos estudantes referentes aos anos anteriores nos quais se espera o domínio na resolução. Das 20 questões, 15 questões envolvem cálculos simples e cinco questões com cálculos compostos (QUADRO 4).

QUADRO 4 - CLASSIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES

Estilo da questão	Operação envolvida	Número da questão
Simples	Adição	1, 6, 10 e 19.
	Subtração	2, 12 e 18.
	Multiplicação	4, 9, 17 e 20.
	Divisão	3, 7, 8 e 14.
Composta	Mista	11 → adição e subtração 5, 13, 15 e 16 → subtração e divisão

FONTE: A autora (2019).

A aplicação ocorreu na sala de aula, em dois horários seguidos sem interrupção, com a presença dos professores regentes nas suas respectivas turmas.

Após a correção das questões verificou-se que a maior dificuldade dos estudantes estava relacionada à compreensão de conceito de geometria (análise detalhada é apresentada no próximo capítulo), fato que fez com que a maioria das tarefas desenvolvidas e apresentadas a seguir estejam relacionadas a essa área da matemática.

3.3 ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE TAREFA DE ESTUDO

Com o intuito de desenvolver a interpretação e organização dos dados de um problema com a identificação das partes e do todo e, com os dados na avaliação diagnóstica inicial, foi realizada uma sequência de tarefa de estudo com o auxílio de alguns materiais manipuláveis.

Durante a leitura da dissertação de Matos (2017), foi verificada uma tarefa que vem ao encontro do presente estudo no que diz respeito ao uso da representação gráfica a partir de uma informação visual. Matos (2017) apresenta (FIGURA 1) uma tarefa de ação de controle e avaliação que possibilita ao professor analisar o processo de ensino e aprendizagem, no assunto de área relacionada na essência todo-partes.


FIGURA1– RESPOSTA CORRETA DA TAREFA CORRESPONDENTE ÀS AÇÕES DE CONTROLE E AVALIAÇÃO.



FONTE: MATOS (2017, p. 115).

A imagem constituída por duas partes (A e E) que compõem o total (T) para a comparação entre os valores e a representação gráfica da situação, conforme Figura 2.

FIGURA 2 - COMPARAÇÃO DAS PARTES-TODO E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.

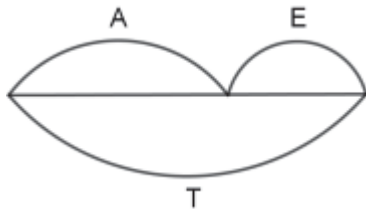
Comparação dos valores na imagem do inteiro	Escolha adequada de representação gráfica da relação partes-todo
	 <p>ou</p>

FONTE: MATOS (2017, p. 115), adaptado pela autora (2019).

Segundo Matos (2017), as ações de avaliação e controle permitem transformar “do modelo da relação universal como estudo de suas propriedades em forma pura (algebricamente)” (MATOS, 2017, p. 115), não só a aparência externa, mas desenvolvendo as conexões internas da relação essencial, que no caso da Figura 2, se refere à junção de regiões com áreas diferentes.

A representação gráfica da constituição das partes apresentada pela imagem, indicada na Figura 2, constitui a transformação do modelo universal da relação universal a partir dos elementos mediadores, conforme Figura 3.

FIGURA 3 - AS TRÊS TRANSFORMAÇÕES DO MODELO ABSTRATO DA RELAÇÃO UNIVERSAL

Plano objetual: área	Modelo universal (representação gráfica com os elementos algébricos)	Transformações do modelo universal
		$A + E = T$ $T - A = E$ $T - E = A$

FONTE: MATOS (2017, p. 115), adaptado pela autora (2019).

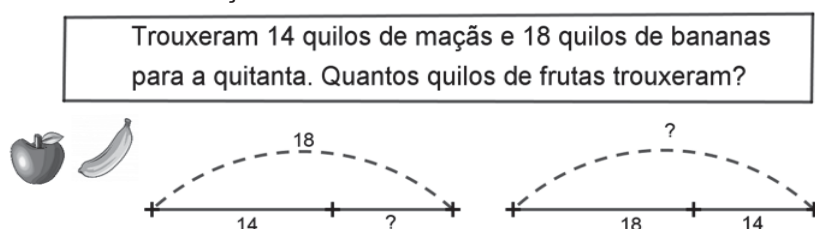
Matos (2017) apresenta nessa tarefa o processo de transição de uma ação à outra, sem o uso de materiais manipuláveis. Assim, a presente pesquisa se diferencia da de Matos (2017) por utilizar materiais manipuláveis e, ao mesmo tempo, se aproxima da autora, pois busca analisar as representações gráficas. Ainda, esta escolha para o desenvolvimento das tarefas de estudo advém dos apontamentos de Nacarato (2004), Lorenzato (2006), Góes (2013), Nacarato e Passos (2013), Góes e Góes (2018), uma vez que esses autores afirmam que esses recursos são importantes para a visualização de conceitos matemáticos. Também, ao utilizar materiais manipuláveis é possível realizar a composição de informações visuais para serem transformadas em representação gráfica e a elaboração algébrica com a identificação das partes e o todo, tendo desta forma, a contribuição dos autores Wong (2010) e Góes e Góes (2018), sobre o princípio visual na composição de elementos geométricos para a representação e visualização de conceitos para a identificação da lei universal das operações fundamentais envolvidas.

A primeira ação de estudo, proposta por Davydov (1988), é a transformação dos dados de estudo para revelar a relação universal do objeto estudado. No contexto da presente pesquisa, ocorrem no uso de materiais manipuláveis e a visualização compositiva de elementos para serem transformados em informações e/ou conceitos, proporcionando a relação de comparação e identificação de outras medidas: partes e o total. Na sequência ocorre a modelação da relação universal na

forma objetivada, gráfica e literal, proposta como segunda ação de estudo por Davydov (1988). A modelação ocorre com a abstração máxima expressada pela representação gráfica com os elementos algébricos que compõem as informações, em que ocorrem as transformações da relação universal em propriedades, como obtenção de partes e do total, conhecida como a terceira ação de estudo. A quarta ação da tarefa é resolver um sistema de tarefas particulares a partir de um procedimento geral. Nessas duas últimas ações, indicadas por Davydov (1988), cabe ao professor verificar as ações das tarefas anteriores e a apropriação da relação universal da tarefa de estudo.

As primeiras tarefas de estudo desenvolvidas na pesquisa utilizam materiais manipuláveis em sua forma compositiva para serem transformadas em uma representação gráfica com elementos algébricos para análise das partes e o todo. Também, é apresentada uma tarefa de estudo sem o uso de material manipulável que envolve a identificação correta da representação dos dados de um problema aritmético. Esta tarefa é baseada no estudo de Alves (2017), que dentre as várias tarefas davydoviana apresentadas sobre o conceito de adição e subtração, utilizou o problema aritmético (FIGURA 4).

FIGURA 4 - IDENTIFICAÇÃO DO ESQUEMA QUE REPRESENTA O PROBLEMA



FONTE: ALVES (2017, p. 174).

Dentre as tarefas de estudo de Alves (2017), com base em Davydov, o problema aritmético foi apresentado como forma objetual. Os dados do problema aritmético (FIGURA 4) foram representados graficamente de duas formas diferentes por segmentos e arcos. Após a interpretação, ocorre a identificação adequada da representação gráfica associada ao problema para a aplicação da operação proposta. O desenvolvimento das ações de estudo proposto por Davydov (1988) inicia com o contexto problema-texto para a transformação dos dados da tarefa cuja finalidade é de revelar a relação universal. Na sequência, há a modelação que se representa graficamente com os dados do problema, exigindo do participante a

transformação da relação universal em suas propriedades essenciais: todo-partes. A leitura, interpretação e identificação das partes determinam a operação para a resolução da tarefa proposta.

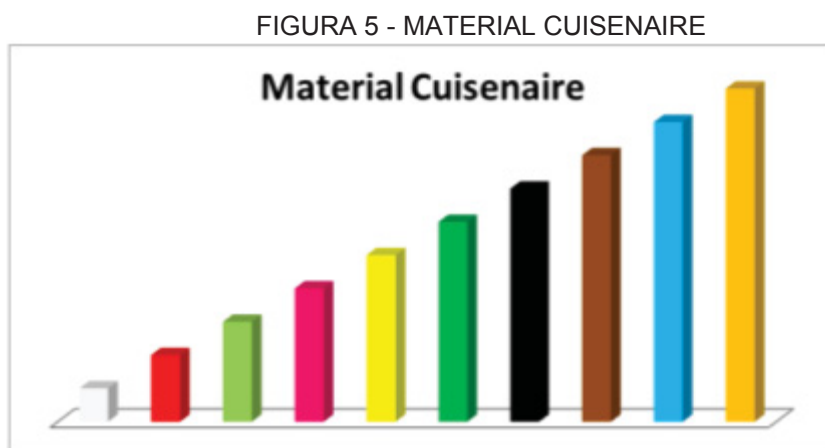
Com essas considerações é apresentado a seguir o desenvolvimento das tarefas, conforme Davydov (1988), e o material manipulável utilizado em cada uma delas. Ao total foram cinco tarefas, sendo quatro com materiais manipuláveis utilizados (Material Cuisenaire, Tangram, Régua, Geoplano).

A quantidade de aulas para a aplicação da sequência de tarefas de estudo com o uso dos materiais manipuláveis foram: quatro aulas de 50 minutos com o Material Cuisenaire, duas aulas de 50 minutos com o uso do Tangram, uma aula de 50 minutos com o uso da Régua, uma aula de 50 minutos com o uso do Geoplano e duas aulas de 50 minutos para o desenvolvimento da tarefa de estudo envolvendo problemas.

Assim, a próxima subseção apresenta a elaboração das tarefas de maneira detalhada com a utilização do material de Cuisenaire. Já nas subseções seguintes são realizados apontamentos específicos de cada material, visto que as formas de elaboração de todas as tarefas seguem a mesma concepção.

3.3.1 Material Cuisenaire

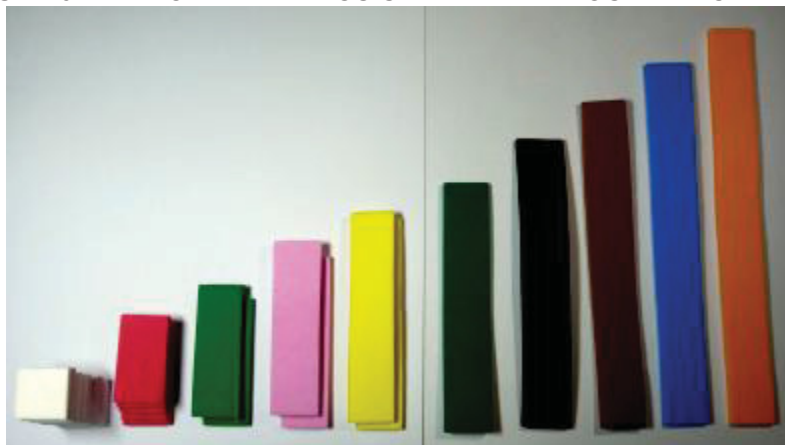
O Material Cuisenaire (FIGURA 5) são barrinhas com diferentes tamanhos e cores utilizadas para construir conceitos básicos de matemática. Foi desenvolvido pelo professor belga Emile Georges Cuisenaire (1891 – 1980).



FONTE: A autora (2019).

Como a escola em que foi desenvolvida a pesquisa não possui este material na sala de matemática, a professora-pesquisadora providenciou dez placas de E.V.A.⁶ nas cores branca, vermelha, verde claro, rosa, amarela, verde escuro, preta, marrom, azul e laranja para recortar e construir as barrinhas, seguindo a escala das cores e tamanhos propostos pelo material (FIGURA 6).

FIGURA 6 - KIT DO MATERIAL CUISENAIRE PARA OS PARTICIPANTES.



FONTE: A autora (2019).

Cada participante recebeu o Material Cuisenaire (FIGURA 6) com as seguintes quantidades de barrinhas: 10 brancas, cinco vermelhas, duas verdes claras, duas rosas, duas amarelas, uma verde escura, uma preta, uma marrom, uma azul e uma laranja, para auxiliá-los na execução da tarefa de estudo (APÊNDICE D).

O Material Cuisenaire é formado por barrinhas e, segundo Wong (2010) possui elementos visuais como: formato, tamanho, cor e textura. Entende-se que “qualquer coisa que pode ser vista tem um formato que proporciona a identificação principal para nossa percepção” (WONG, 2010, p. 43), entretanto esse formato possui tamanho que “é relativo se o descrevemos em termos de grandeza ou pequenez, mas é também fisicamente mensurável” (WONG, 2010, p. 43). O formato e o tamanho são os dois elementos visuais conceituais para o desenvolvimento da tarefa de estudo envolvendo este material manipulável durante a pesquisa.

A menor barra do material Cuisenaire representa a unidade de medida básica e as demais diferenciam-se em uma unidade sequencialmente do um ao 10. Cabe ressaltar que as barrinhas não possuem valores escritos, mas para a tarefa de

⁶ A sigla E.V.A. significa processo químico que mistura etil, vinil e acetato, resultando em placas emborrachadas.

estudo foram inscritas letras para diferenciá-las e desenvolverem a forma algébrica na composição das informações sobre comprimento, assim como proposto por Mansutti (1993 citado por NACARATO, 2004, p. 3), que afirma ser “um interessante trabalho sobre a produção de escrita com números e letras” (MANSUTTI, 1993, p. 24). Assim, as cores foram representadas pelas seguintes letras (FIGURA 7).

FIGURA 7 - ESCALA DE CORES E SUAS RESPECTIVAS LETRAS.

FONTE: A autora (2019).

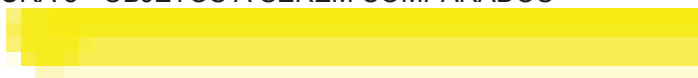
O uso das letras foi necessário para identificar as barrinhas coloridas, a representação gráfica do objeto e a escrita algébrica a partir das análises das partes e do todo. A ordem alfabética representada nas cores segue a ordem decrescente de unidades das barrinhas.

Dentre as tarefas de estudo envolvendo materiais manipuláveis, o material Cuisenaire foi utilizado por primeiro, sendo o que mais utilizou aulas. Os participantes receberam um kit de barrinhas de e.v.a. e a folha de tarefas de estudo. Eles eram os sujeitos das análises e a professora-pesquisadora, a orientadora durante a resolução das tarefas de estudo. Foi preciso quatro aulas para cada turma para que compreendessem esta proposta que é diferente do processo de ensino-aprendizagem habitual.

A primeira ação de estudo corresponde em transformar os dados do objeto para revelar a relação universal. São propostas tarefas com o uso das barrinhas (FIGURA 8)⁷, para compará-las em menor, igual ou maior. É um processo que implica em “visualizarmos objetos com tamanhos diferentes e fazermos analogias comparando dois objetos em função de suas medidas reais e com base em uma estrutura dada, o campo visual” (VAZ; SILVA, 2016, p. 102). Após as comparações orientadas pela professora-pesquisadora, os participantes deviam responder algumas análises, colocando (V) para verdadeira e (F) para falsa.

⁷ As tarefas de estudo envolvendo o material Cuisenaire e o tangram estão apresentadas com as soluções nos parênteses.

FIGURA 8 - OBJETOS A SEREM COMPARADOS



FONTE: A autora (2019).

Na próxima tarefa, usando as mesmas barrinhas e após as análises de comparação, os participantes são questionados sobre qual seria a barrinha adequada para preencher o espaço (FIGURA 9). Desta forma, tem-se a terceira barrinha como parte de b que complementa f para representar o todo.

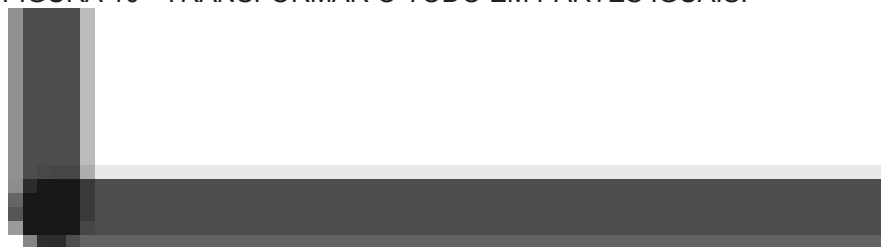
FIGURA 9 - OBTENÇÃO DA OUTRA PARTE DA RELAÇÃO PARTES-TODO.

FONTE: A autora (2019).

Todas as tarefas de estudo com o material Cuisenaire foram desenvolvidas como participantes em duplas. Na tarefa indicada na Figura 9, os participantes foram instigados a identificar a outra parte para preencher e completar o todo.

Na terceira tarefa, a barrinha maior (laranja) deveria ser representada por barrinhas de mesma cor (FIGURA 10). O participante precisava identificar quais barrinhas de mesma cor era possível representar o todo e, em seguida fazer as análises.

FIGURA 10 - TRANSFORMAR O TODO EM PARTES IGUAIS.



FONTE: A autora (2019).

Nas análises (FIGURA 10) não há comparação com a barrinha branca (j), ausência realizada propositalmente, com o objetivo de verificar se os participantes conseguiam identificar outra possibilidade para formar o todo proposto da tarefa. Sendo assim, identificando a medida unitária.

A quarta tarefa de estudo foi a identificação do todo (barrinha maior) a partir das barrinhas menores (FIGURA 11). Tarefa da composição do todo a partir das partes, identificando a barrinha que compõe esse total. As barrinhas na forma objeta, foram representadas graficamente indicando as partes que constituem o total e, em seguida suas análises.

FIGURA 11 - OBTENÇÃO DO TODO A PARTIR DAS PARTES.

FONTE: A autora (2019).

Em seguida ocorreu a segunda ação da tarefa de estudo, a relação universal da forma objetivada em representação gráfica dos elementos algébricos para a forma literal, na relação parte-todo (FIGURA 12).

FIGURA 12- RELAÇÃO PARTES-TODO

FONTE: A autora (2019).

Na quinta tarefa de estudo haviam cinco itens, sendo que a primeira ação da tarefa de estudo foi transformar os dados da representação objetual revelando suas relações de um todo que está formado em partes genéricas (FIGURA 13). A cada tarefa o todo está composto por partes: diferentes ou iguais; duas ou três partes.

FIGURA 13 - FORMAÇÃO DO TODO EM DUAS PARTES DIFERENTES.

FONTE: A autora (2019).

A segunda ação da tarefa de estudo ocorreu com a modelação da relação universal com o uso da representação gráfica e os elementos algébricos seguindo as proporções das partes, pois a “proporção é a relação entre as partes, e que cada parte é percebida em função de uma estrutura, de um todo” (VAZ; SILVA, 2016, p. 103), conforme Figura 14.

FIGURA 14 - REPRESENTAÇÃO DO TODO EM PARTES DIFERENTES.

FONTE: A autora (2019).

A terceira ação da tarefa de estudo consistiu em transformar a relação universal em propriedades na identificação e obtenção das partes e o todo (QUADRO 5).

QUADRO 5 - PROPRIEDADES

Representação da relação universal de forma modelada para identificação das partes e do todo	Transformação da relação universal em propriedades
	$x + y = z$ $x = z - y$ $y = z - x$

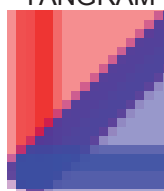
FONTE: MATOS (2017, p. 53), adaptado pela autora (2019)

A construção da representação gráfica das informações das barrinhas e as análises de forma algébrica propiciam aos participantes a análise das partes e o todo para as operações de adição e subtração. Também permite ao professor a verificação e apropriação da composição dos dados do objeto estudado no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o “processo de ascensão da criança no sentido do domínio dos conceitos” (VYGOTSKY, 2000, p. 185), ocorre ao estabelecer relações dos objetos. O conceito das operações se estabelece a partir da medição de grandezas, “e assim formar o conceito do ‘núcleo’ do objeto. Entretanto, a adequação do ‘núcleo’ a seu objeto é revelada quando se extraem as múltiplas manifestações particulares” (DAVYDOV, 1988, p. 183).

3.3.2 Tangram

O tangram (FIGURA 15) é um quebra-cabeça quadrado formado por sete regiões poligonais, sendo cinco regiões triangulares (duas grandes, uma média e duas pequenas) e duas regiões quadrangulares (uma quadrada e um paralelogramo).

FIGURA 15 - TANGRAM



FONTE: A autora (2019)

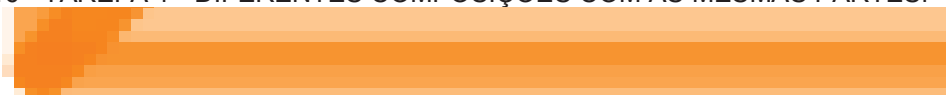
A sala ambiente de matemática desta escola possui nove caixas de tangram em madeira, cada caixa possui cinco tangrans. Estes, podem ser utilizados de uma só cor ou composta por outras cores. A região triangular menor é a região poligonal tida como unidade básica de medida de área nesta pesquisa.

Na tarefa de estudo (APÊNDICE E) há a imagem do tangram elaborada pela professora-pesquisadora, conforme Figura 16. Nela as regiões poligonais não possuem letras na parte interna, mas foram indicadas para o desenvolvimento das tarefas de estudo para a elaboração da representação gráfica e a parte algébrica na composição das informações. Cabe ressaltar que as cores e as letras foram escolhidas de modo aleatório pela professora-pesquisadora. Conforme Vaz e Silva (2016, p. 115-116), “o uso da cor depende da sensibilidade, da criatividade e do domínio técnico do artista, designer ou arquiteto, ao empregar a cor em seus objetos e projetos visuais” e, para o objetivo e realização da tarefa com o uso do tangram, as cores iguais foram identificadas pelas regiões poligonais de mesmo formato e tamanho. Esse processo é o princípio de acumulação indicado por Munari (2001 citado por VAZ; SILVA, 2016, p. 192) de como “uma forma básica pode produzir formas mais complexas”, a partir de polígonos com mesmas cores formando outros polígonos.

Nacarato (2004) apresenta uma forma de trabalhar com o tangram em que se “possibilitam diferentes rotações, composições e decomposições, ampliando o repertório de representações possíveis não apenas para a do quadrado, como também para a de outros polígonos” (NACARATO, 2004, p. 4), sendo algumas ideias utilizadas nas três primeiras tarefas de estudo.

Na primeira tarefa de estudo foi solicitado aos participantes que utilizassem as duas peças maiores e formassem uma composição. Após, em dupla, analisassem as imagens e respondessem as análises algébricas ao lado (FIGURA 16).

FIGURA 16 - TAREFA 1 - DIFERENTES COMPOSIÇÕES COM AS MESMAS PARTES.



Na segunda tarefa, tendo o quadrado, os participantes deveriam identificar quais regiões poligonais o formam e, em seguida, as análises algébricas, conforme Figura 17.

FIGURA 17 - COMPOSIÇÃO DO TOTAL EM PARTES IGUAIS.

FONTE: A autora (2019).

Na terceira tarefa de estudo (FIGURA 18) era necessário preencher a parte pontilhada com regiões poligonais para formar a outra metade da região triangular.

FIGURA 18 - COMPOSIÇÃO DE UMA REGIÃO POLIGONAL POR DIFERENTES REGIÕES POLIGONAIS.



FONTE: A autora (2019).

Nas três primeiras tarefas, foi desenvolvido o processo de composição de regiões poligonais, comparação entre elas e a escrita de sua composição algébrica.

Nas próximas tarefas a imagem foi apresentada e os participantes deveriam transformá-las na representação gráfica associando as letras ao tamanho do segmento proporcional à região correspondente, formando uma composição visual de partes e do todo para posterior análise. A imagem foi representada objetivamente para serem transformados os dados da relação universal das partes e do todo.

Na Figura 19, a representação gráfica foi apresentada e o participante precisava indicar as letras que indicassem o segmento relacionado proporcionalmente às regiões poligonais.

FIGURA 19 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FORMA OBJETAL E SUAS ANÁLISES ALGÉBRICAS.

FONTE: A autora (2019).

A representação gráfica constituída de segmentos de reta e arco (FIGURA 19) tem um significado porque o “desenho [...] transmite uma mensagem” (DONDIS, 2015, p. 44) indicando o tamanho das regiões que constituem o triângulo e, em seguida as análises.

Na quinta tarefa de estudo (FIGURA 20), a imagem representada na forma objetal deveria ser representada graficamente com os elementos algébricos relacionados proporcionalmente à região poligonal e, em seguida, indicar as propriedades algébricas da forma objetal e gráfica.

FIGURA 20 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E ANÁLISES DA FORMA OBJETAL.



FONTE: A autora (2019).

Na sexta tarefa, a representação gráfica da forma objetal não foi apresentada e o participante devia executar tal representação conforme as informações sobre as regiões poligonais (FIGURA 21).

FIGURA 21 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FORMA OBJETAL.

FONTE: A autora (2019).

As tarefas de estudo com o tangram (FIGURA 22) envolveram a proposta de Munari (2001) de que formas básicas constituem outras mais complexas. Após a ação de estudo em transformar os dados do objeto estudado em revelar a relação universal, tem-se a próxima ação de modelar a forma objetivada, gráfica e literal da imagem composta, em que o todo é formado por duas partes iguais, sendo uma delas subdividida.

FIGURA 22 - MODELO UNIVERSAL DA COMPOSIÇÃO DAS REGIÕES POLIGONAIS DO TANGRAM E SUAS PROPRIEDADES.



FONTE: A autora (2019).

Na Figura 22, x é composto por duas partes iguais a y , sendo que uma parte y é subdividida em outras duas partes iguais z . Com a tarefa de estudo envolvendo o tangram na composição de regiões poligonais a partir de formas básicas como a região triangular, foi possível desenvolver operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão sobre as partes que formam o todo.

3.3.3 Régua

Para esta tarefa de estudo denominada aqui de “régua” foram utilizadas as régua da sala ambiente de matemática. A menor unidade básica para o desenvolvimento das tarefas de estudos foi o 1 cm.

Alves (2017) apresenta, em uma das tarefas de estudo, o uso de instrumento, no caso a régua, para o desenvolvimento do teor numérico da grandeza e da unidade de medida. Para a presente pesquisa foi elaborada para a tarefa de estudo (APÊNDICE F) a interpretação numérica das grandezas compostas por partes e o todo indicados na régua, conforme Figura 23.

FIGURA 23 - PARTES NUMÉRICAS DA GRANDEZA QUE COMPÕE O TODO.

FONTE: A autora (2019).

A tarefa de estudo teve por objetivo desenvolver a quantidade do total formada pelas medidas das partes, o caráter de contagem. Assim, primeiro foi realizada a leitura das medidas de cada parte com o uso do 1 cm como unidade de medida. A representação objetal estava formada pelas partes coloridas para formar o todo a fim de revelar a situação estudada.

Considerando o conceito de número, segundo Rosa (2012) (citada por ALVES, 2017, p. 116), “é manifestado a revelação universal $A = n \cdot E$ ”, considerando E a unidade de medida e n o número de vezes que a unidade de medida é representada no comprimento indicado (FIGURA 24).

FIGURA 24 - MODELAGEM UNIVERSAL PARA A CONTAGEM DAS MEDIDAS.

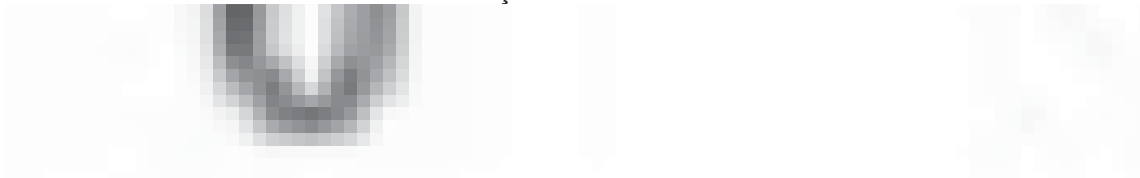
FONTE: ALVES (2017), adaptado pela autora (2019).

Na Figura 24, a medida de A é igual a 3.E, ou seja, $A = 3 \text{ cm}$, o que para Rosa (2012 citado por ALVES, 2017, p. 116) demonstra que o “modelo é revelador para o teor aritmético e algébrico do conceito de número”. Assim, foram realizadas tarefas particulares para serem resolvidas por este procedimento geral em especificação numérica dos comprimentos (partes coloridas) para obter a especificação do comprimento do todo. A representação gráfica elaborada a partir das especificações numéricas das partes para elaborar o todo e as análises são formas de controle e avaliação da relação universal da contagem das medidas indicadas na reta numérica.

Na última tarefa de estudo (FIGURA 25), foi proposto que a representação objetal deveria ser formada conforme a medida total solicitada e a quantidade de

partes. Sendo que as partes deveriam ser obtidas de modo que completassem o total indicado.

FIGURA 25 - COMPOSIÇÃO DAS PARTES E O TODO.



FONTE: A autora (2019).

Esta última tarefa possuía cinco itens, nos quais os participantes possuíam o valor total e deveriam elaborar as partes por diferentes propostas e, em seguida, representar graficamente para posterior análise. A representação objetal (FIGURA 25) é o todo formado por 11 medidas de comprimento, logo, a representação gráfica do todo é constituída de dois comprimentos de medidas diferentes. Tomando como base a contagem da unidade de medida da relação universal, o comprimento das partes deve ter medidas diferentes totalizando 11 cm de comprimento e, não necessariamente começando pelo zero.

3.3.4 Geoplano

O geoplano (FIGURA 26) é uma tábua de madeira com vários pinos pequenos, os quais o estudante pode engatar com elástico ou passar o barbante. Esse material foi utilizado da sala ambiente de matemática da escola. A menor unidade básica de comprimento é de 1 segmento (medida que vai de um pino ao pino seguinte) na forma horizontal ou vertical.

FIGURA 26 - GEOPLANO



FONTE: A autora (2019).

A proposta inicial da tarefa de estudo utilizando o geoplano (APÊNDICE G) foi a de construir um “caminho” feito por fio de lã, no sentido horizontal e vertical escolhido pelo participante, num total de 12 segmentos.

Alves (2017) apresenta na vigésima segunda tarefa a composição de um todo, considerando duas unidades de comprimento diferentes. Propiciando aos participantes a transformação do modelo essencial do número a partir da contagem, em que a grandeza pode ser obtida pela variação da unidade de medida.

A primeira tarefa de estudo (FIGURA 27) solicitava ao participante que formulasse uma imagem com 12 segmentos utilizando fio de lã e, na sequência, desenhasse na malha pontilhada a imagem para ser elaborada a representação gráfica seguindo duas unidades de medidas diferentes.

FIGURA 27 - EXEMPLO DO TODO FORMADO POR SEGMENTOS DE RETAS NA FORMA HORIZONTAL E/OU VERTICAL.



FONTE: A autora (2019).

A tarefa de estudo mostra que o processo de medição (FIGURA 28), ao usar a unidade de medida a , o todo é composto por 12 segmentos a . Já, ao utilizar a unidade de medida b , o todo é formado por seis medidas b .

FIGURA 28 - REPRESENTAÇÃO DO TODO POR DUAS UNIDADES DE MEDIDA DIFERENTES.

FONTE: A autora (2019).

Tendo como base o modelo geral de número, a imagem total (T) formada por 12 segmentos no geoplano e sendo representada graficamente por duas unidades de medida diferentes, pode-se ser escrita como: $T=12.a$ e $T=6.b$. As igualdades possuem “valores aparentemente distintos, todavia, a essência é a mesma, pois se referem ao mesmo comprimento. O que faz os resultados serem numericamente desiguais é o comprimento da unidade” (ALVES, 2017, p. 117).

Nos próximos itens da tarefa de estudo, foram propostas outras formas de unidade de medida diferentes sem alterar a grandeza de medida, ou seja, comprimento de 12 segmentos. Em seguida, foi registrado por representação gráfica as diferentes unidades básicas associadas e novas letras, conforme Quadro 6.

QUADRO 6 - COMPOSIÇÃO DO TODO POR DIFERENTES UNIDADES DE MEDIDA.

Unidade de medidas diferentes	a = 1	b = 2	c = 3	d = 4	e = 6	f = 12
Composição da representação gráfica para obter o total 12	$T = 12.a$	$T = 6.b$	$T = 4.c$	$T = 3.d$	$T = 2.e$	$T = 1.f$

FONTE: A autora (2019).

No Quadro 6, há seis formas da relação todo-partes sem variar a grandeza medida. Na representação gráfica há a proposta de adição das partes iguais, a multiplicação, a equação e a divisão, em que o todo é separado em partes iguais.

Na segunda tarefa de estudo, a proposta no geoplano foi a de delimitar com fio de lã uma região quadrada. A transformação dos dados desta tarefa de estudo teve a finalidade de revelar a relação universal da formação das áreas quadradas. A pesquisa de Galdino (2016) apresenta a relação universal do conceito de multiplicação, em que a modelação da relação universal é formada por esquema de setas com a grandeza em unidades básicas (A), intermediárias (B) para a constituição do todo (C), para a formação da lei universal do conceito de multiplicação, conforme o Quadro 7.

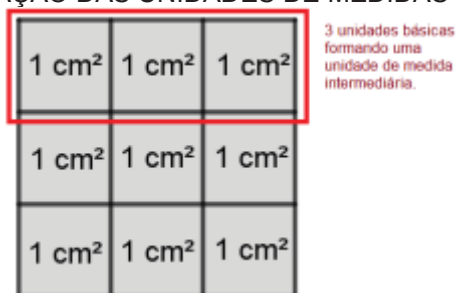
QUADRO 7 - ESQUEMA DE SETAS: RELAÇÃO UNIVERSAL DA MULTIPLICAÇÃO.

Esquema de setas: relação universal	Lei da relação universal do conceito de multiplicação
	$z.x = y$

FONTE: GALDINO (2016), adaptado pela autora (2019).

Para a formação da região quadrada, a unidade de medida básica é de 1 cm^2 . A repetição dessa unidade de medida básica constitui a medida intermediária. Com a quantidade de vezes da medida intermediária, tem-se o total, conforme Figura 29.

FIGURA 29 - IDENTIFICAÇÃO DAS UNIDADES DE MEDIDAS NA REGIÃO QUADRADA.



FONTE: A autora (2019).

A representação gráfica das unidades de medida da região quadrada e, com base no esquema de Galdino (2016)(QUADRO 8).

QUADRO 8 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E ESQUEMA DA MULTIPLICAÇÃO SOBRE ÁREA DA REGIÃO QUADRADA.

Representação gráfica	Esquema da relação universal da multiplicação

FONTE: GALDINO (2016), adaptado pela autora (2019).

Em relação à área da região quadrada, a quantidade de vezes da unidade de medida básica é a mesma que a quantidade de vezes da medida intermediária, então a modelação da relação universal é apresentada no Quadro 9.

QUADRO 9 - MODELAÇÃO UNIVERSAL DA ÁREA QUADRADA.

Esquema de setas: relação universal	Lei da relação universal do conceito de multiplicação para o cálculo de área
	$x \cdot x = y$

FONTE: GALDINO (2016), adaptado pela autora (2019).

Com a lei da relação universal do conceito de multiplicação para o cálculo de área, as demais tarefas de estudo puderam ser resolvidas pelo procedimento geral. O identificar as unidades básicas e intermediárias é fundamental para a apropriação do cálculo de área.

3.3.5 Problemas com representação gráfica

Na última tarefa de estudo foram apresentados 18 problemas aritméticos (APÊNDICE H) que possuem ao menos duas opções de representação gráfica envolvendo os dados. Nesta tarefa, os estudantes deveriam representar graficamente as partes e o todo do problema e aplicar a operação adequada para obter o valor esperado.

Com a compreensão dos dados e a de que um problema pode ser organizado de modo a identificar a operação esperada para a resolução, tem-se a transformação dos dados de uma representação objetiva em forma de um texto para a representação gráfica que encaminhará a resolução do problema aritmético proposto.

Alves (2017) se refere a este tipo de tarefa de estudo na relação essencial todo-partes por duas interpretações: “a primeira se refere aos dados do problema e a segunda dos esquemas que lhes exigiam uma decisão” (ALVES, 2017, p. 174) em compreender qual traduz corretamente os dados conhecidos e desconhecidos e a aplicação correta adequada à solução.

Apresentadas as tarefas de estudos desenvolvidas para a pesquisa, na próxima subseção é apresentada a elaboração da avaliação diagnóstica final, cuja finalidade foi a de verificar se os estudantes estruturavam os dados do problema na

forma de representação gráfica para interpretá-los e aplicar a operação correta para obter o resultado esperado.

3.4 ELABORAÇÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

O último instrumento de coleta de dados desta pesquisa foi a avaliação diagnóstica final (APÊNDICE I), que teve a finalidade de verificar se os estudantes passaram a utilizar a representação gráfica como um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos envolvendo as quatro operações.

Esse instrumento foi composto de 20 questões análogas à avaliação diagnóstica inicial. Duas questões (4 e 9) possuem imagens ilustrativas; três questões (16, 17 e 20) possuem a representação gráfica, duas questões (18 e 19) possuem uma região retangular para ser indicado o valor adequado e nas demais questões só há o problema proposto descrito.

Sua aplicação teve a duração de duas aulas de 50 minutos, juntamente com os professores regentes e esperava-se que os participantes representassem graficamente os dados do problema e, em seguida, realizassem o cálculo adequado.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Esta seção é constituída de sete tópicos. No primeiro se apresenta como foram elaborados os elementos de análise. Na sequência, indicam-se como foram selecionados cinco participantes, que tiveram os registros produzidos durante a pesquisa, analisados com a finalidade de cumprir o último objetivo específico de discutir os aspectos em relação à aprendizagem da resolução de problemas aritméticos com o auxílio da representação gráfica. Na sequência é apresentado cada um dos cinco elementos de análise articulando os registros produzidos pelos participantes com as observações da professora-pesquisadora e o aporte teórico.

4.1 ELEMENTOS DE ANÁLISE

O objetivo desta pesquisa foi o de analisar de que maneira a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos. Durante a pesquisa foi verificado pelos estudos de Galdino (2017) que a teoria Desenvolvidor de Davydov seria o meio adequado pelo qual o proposto poderia ser efetivado.

Davydov (1988) propõe seis ações a serem realizadas por meio de uma tarefa de estudo para o desenvolvimento do pensamento científico,

- 1) Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado;
- 2) Modelação da relação universal na forma objetivada, gráfica e literal;
- 3) Transformação do modo da relação universal para o estudo de suas propriedades em forma pura;
- 4) Resolução de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
- 5) Controle da realização das ações anteriores;
- 6) Avaliação da apropriação do procedimento universal como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVYDOV, 1988, p. 181).

Assim, articulando as seis ações propostas por Davydov (1988) com o objetivo desta pesquisa, foram elaborados cinco elementos de análises, em que o apenas o item três das seis ações de Davydov (1988) não é analisado, visto que é direcionado ao estudo algébrico e, assim, não ao desenvolvimento da representação gráfica.

Tendo o objetivo da pesquisa de analisar de que maneira a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos, decidiu-se analisar os instrumentos de avaliação diagnóstica inicial e final dos participantes em paralelo com a sequência de tarefas de estudo. Ainda, devido à teoria de Davydov ter em uma de suas etapas a “responsabilidade” do professor, também é analisado a sequência de tarefas de estudos produzidas pela professora-pesquisadora.

Assim, as quatro primeiras ações de estudo de Davydov (1988) estão mais diretamente relacionadas à produção dos estudantes e, as duas últimas associadas ao professor. Sendo assim, nas unidades de análise 1, 2, 3 e 5 são analisados o material produzido pelo participante e, a unidade de análise 4 refere-se ao material produzido pela professora-pesquisadora. Deste modo, os cinco elementos de análise para a pesquisa são apresentados no Quadro 10.

QUADRO 10–ELEMENTOS DE ANÁLISE ARTICULADOS COM AS AÇÕES DE DAVYDOV (1988).

Elementos de análise	
1	A representação gráfica na transformação dos dados de uma tarefa de estudo
2	A representação gráfica como mediadora entre as informações de um problema aritmético ao cálculo
3	A representação gráfica na resolução de um sistema de tarefas particulares
4	A representação gráfica no processo de ensino
5	A representação gráfica na aprendizagem

Fonte: A autora (2019).

No elemento de análise *a representação gráfica na transformação dos dados de uma tarefa de estudo* é analisada de que maneira o participante organizou e interpretou os dados do problema na forma de representação gráfica. Para isso, foram verificados os seguintes instrumentos de pesquisa: avaliação diagnóstica inicial e final de cinco participantes.

No elemento de análise *a representação gráfica como mediadora entre as informações de um problema aritmético ao cálculo* foi verificado como o participante usufruiu da representação gráfica ao organizar as partes e o todo, sobretudo compreendo como representar as partes proporcionais aos valores indicados. O instrumento de pesquisa utilizado para tal análise foi a avaliação diagnóstica final dos cinco participantes.

No elemento de análise *a representação gráfica na resolução de um sistema de tarefas particulares* foi analisado como o participante apresentou a solução por meio de representação gráfica, sem resolver de forma algébrica. O instrumento de pesquisa analisado é a avaliação diagnóstica final dos cinco participantes.

No elemento de análise *a representação gráfica no processo de ensino* foi apresentada como a representação gráfica foi aplicada em sala para o estudo das operações fundamentais juntamente com os materiais manipuláveis. O instrumento de pesquisa foram os recursos utilizados nas tarefas de estudo, ou seja, na sequência de tarefas produzidas pela professora-pesquisadora.

No elemento de análise *a representação gráfica na aprendizagem* foi apresentado como os participantes passaram a utilizar a representação gráfica, relacionando os instrumentos de pesquisa avaliação diagnóstica inicial e final dos cinco participantes.

Apresentados os cinco elementos de análise; o que será analisado em cada um deles e os instrumentos utilizados, a próxima subseção apresenta como ocorreu a seleção dos registros produzidos pelos participantes para essa análise.

4.2 PARTICIPANTES DA ANÁLISE

A presente pesquisa foi aplicada nas cinco turmas de 6º ano do ensino fundamental, período vespertino, da instituição de ensino, com o objetivo de não privilegiar uma turma ou outra mantendo a mesma metodologia. Com isso, houve muitos participantes, pois dos 160 estudantes matriculados nessas turmas, 124 foram autorizados por seus responsáveis a participar da pesquisa, mediante autorização mencionada no capítulo 3.1.

Considerando que a presente pesquisa possui a abordagem qualitativa, esse número é elevado para a análise que seria realizada. Assim, decidiu-se analisar um estudante de cada turma e, para isso, o critério de seleção escolhido foi o de selecionar aqueles participantes que não alcançaram resultados satisfatórios na avaliação diagnóstica inicial, mas que, na avaliação diagnóstica final, seus resultados melhoraram com o uso da representação gráfica por meio das tarefas desenvolvidas na teoria do ensino desenvolvimental.

Desta forma, os participantes selecionados para análise foram E04D, E09E, E32F, E05G e E17H, cujos resultados que demonstram suas escolhas são apresentados no Quadro 11.

QUADRO 11- TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Avaliação	Acertos	Parcial	Erros	Em branco
E04D	Inicial	7	3	11	0
	Final	12	1	7	0
E09E	Inicial	6	2	1	11
	Final	9	4	6	1
E32F	Inicial	5	3	12	0
	Final	11	2	7	0
E05G	Inicial	7	2	11	0
	Final	14	4	2	0
E17H	Inicial	1	3	14	2
	Final	9	5	6	0

FONTE: A autora (2019).

O Quadro 11 apresenta a tabulação dos resultados dos cinco participantes nas duas avaliações diagnósticas. São participantes que não conseguiram bons resultados na avaliação diagnóstica inicial e que na avaliação diagnóstica final apresentaram mudanças em seu desempenho.

Os participantes E04D, E32F, E05G e E17H aumentaram a quantidade de questões corretas e diminuíram a quantidade de questões erradas. Já o participante E09E aumentou a quantidade de questões corretas e diminuiu a quantidade de questões em branco.

Foi verificado que na avaliação diagnóstica inicial destes cinco participantes da análise não havia manifestação de representação gráfica, mas após a aplicação da sequência de tarefas, eles passaram a utilizá-la na avaliação diagnóstica final. Cabe ressaltar que outros participantes tiveram a mesma característica quanto ao uso das representações gráficas nas avaliações. A saber, na avaliação diagnóstica inicial, dos 124 participantes, 26 utilizaram alguma forma de representação gráfica para registrar suas ideias ou resolver alguns dos problemas propostos. Após a aplicação da sequência de tarefa de estudos esse número aumentou para 116 participantes, ou seja, esse é o total de participantes que utilizaram a representação

gráfica na organização dos dados e na resolução de problemas na avaliação diagnóstica final.

Na Tabela 1 é apresentada a porcentagem das questões corretas, parciais, erradas e em branco nas avaliações diagnósticas – inicial e final.

TABELA 1 - TABULAÇÃO DA CORREÇÃO DAS AVALIAÇÕES DIAGNÓSTICAS

Correção	Avaliação diagnóstica	
	Inicial	Final
Correta	55%	62%
Parcial	10%	11%
Errada	27%	22%
Em branco	8%	5%
Total	100%	100%

FONTE: A autora (2019).

Na Tabela 1 as questões classificadas como correta e parcial tiveram um aumento em seus resultados. Já nas questões consideradas como errada e em branco houve uma redução. Estes valores apresentados na Tabela 1 demonstram uma melhora no desempenho dos participantes em resolver os problemas propostos na avaliação diagnóstica final.

Houve um aumento da taxa de questões corretas, em que o uso da representação gráfica auxiliou na organização dos dados do problema, corroborando pelo que Góes e Góes (2018) indicam de que “se bem elaborados, com detalhes necessários para precisa interpretação, os desenhos conseguem obter melhores resultados do que a escrita ou a fala na transmissão de uma mensagem ou ideia” (GÓES; GÓES, 2018, p. 109), ainda, para Vygotsky (1984 citado por OLIVEIRA, 1995, p. 71), o desenho é “como instrumento, como signos mediadores que representam conteúdos determinados”.

Assim, apresentado como foram selecionados os participantes para a análise, o primeiro elemento de análise abordado é tratar da representação gráfica na transformação dos dados da tarefa de estudos.

4.3 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS DE UMA TAREFA DE ESTUDO

Como mencionado anteriormente, nesse elemento analisa-se de que maneira o participante organizou e interpretou os dados do problema na forma de representação gráfica. Assim, os registros apresentados nesse tópico são provenientes das avaliações diagnósticas inicial e final dos participantes, cujas as questões selecionadas são semelhantes, ou seja, tratam em suas resoluções de como os estudantes deveriam utilizar as mesmas operações aritméticas.

Ao apresentar os registros nessa análise, haverá a composição de duas imagens, sendo a figura *a* o registro da resolução do participante no que se refere à avaliação diagnóstica inicial. Já a figura *b* refere-se ao registro da solução apresentada pelo participante na avaliação diagnóstica final. Em algumas análises haverá a imagem e/ou relatos dos participantes para apresentar seus comentários durante o desenvolvimento das tarefas de estudo e que vem corroborar determinada atitude na avaliação diagnóstica final.

Para este elemento de análise foi selecionado uma questão de cada um dos cinco participantes, mostrando a diversidade de modos de representação. Assim, é apresentada a questão 8 do participante E04D, a questão 3 do participante E09E, a questão 11 do participante E32F, a questão 18 do participante E05G e uma questão 19 do participante E17H.

a) Questão 1 – participante E17H

No panorama geral, ao tabular a correção da avaliação diagnóstica inicial, dos 124 participantes, dois participantes não resolveram corretamente a questão 1 sobre adição, e um deles foi o participante E17H (FIGURA 30a). Após a aplicação da sequência de tarefas de estudos pela professora-pesquisadora pôde-se verificar, na avaliação diagnóstica final (FIGURA 30b), que este participante utilizou a representação gráfica para organizar os dados do problema e, respondeu corretamente o algoritmo da adição.

Na Figura 30a, o participante E17H não indicou a operação a ser utilizada e colocou o resultado como uma adição de parcelas. Também não observou que ao reunir duas parcelas com valores menores que 100, o resultado não poderia ser maior que 200.

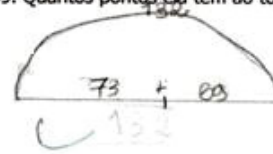
FIGURA 30—REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E17H - QUESTÃO 1

- a) 1) No dia do seu aniversário, Márcia ganhou 65 reais de seu pai e 85 reais da sua tia. Quantos reais ela ganhou nesse dia?
- b) 1) Marina estava jogando vídeo-game e marcou 73 pontos na primeira fase. Na segunda ela marcou 59. Quantos pontos ela tem ao todo?

$$\begin{array}{r} 65 \\ + 85 \\ \hline 212 \end{array} \quad \times$$



$$\begin{array}{r} 73 \\ + 59 \\ \hline 132 \end{array}$$



FONTE: A autora (2019).

A representação gráfica pelo participante E17H na avaliação diagnóstica final (FIGURA 30b) vem ao encontro do que Davydov (1988 citado por MATOS, 2017, p. 51) afirma de que “o esquema representa a relação geneticamente essencial para a interpretação do enunciado do problema, do seu conteúdo, no sentido da determinação rápida da operação a ser realizada, a partir da relação todo-partes”. Também é possível observar na Figura 30b que o participante E17H indicou a parte maior sendo o valor 73 e a outra parte menor o valor 59, logo $73 > 59$.

A primeira tarefa de estudo foi com o material Cuisenaire, na qual se iniciou realizando análises de igualdade e desigualdade em relação a duas barrinhas propostas. Para isso, os participantes pegavam as barrinhas solicitadas e faziam a comparação, colocando-as paralelas e sobre a mesa. Também ocorreram as análises de igualdade, desigualdade e composição das barrinhas que compõem o total (FIGURA 31).

FIGURA 31 - COMPARAÇÃO E COMPOSIÇÃO DAS BARRINHAS DO MATERIAL CUISENAIRE



FONTE: A autora (2019).

Em seguida à composição da barrinha maior, que no caso da Figura 31 é a de cor azul, por outras barrinhas menores, os participantes precisavam registrar suas análises.

Na última tarefa proposta deste material, os participantes deveriam escolher um total para ser representado por partes conforme a imagem indicada e depois registrar suas análises. O relato⁸ apresentado a seguir não é específico do participante E17H, mas será representado por dois participantes (P1 e P2), juntamente com a professora-pesquisadora (PP), uma vez que vem ao encontro do porquê de desenhar a representação gráfica com tamanhos diferentes na avaliação diagnóstica final.

PP: Nessa proposta eles são iguais ou diferentes?
 P1: Diferentes.
 PP: Então quem é maior?
 P1: d é maior que h (apresentando as duas barrinhas)
 PP: Então vamos escrever a sua análise.
 P1: (escreveu $d > h$)
 PP: E aqui. Uma análise sua. O que você quis dizer aqui? (perguntando para outro participante)
 P2: $j + b$ que dá a . Como se fosse uma conta de mais que poderia ser $1 + 9$ que dá 10.
 PP: Então são duas partes que resultam num total? Com a sua proposta elas são medidas diferentes.
 Poderia ser $5 + 5$? Porque $5 + 5$ é 10.
 P2: $5 + 5$ é 10 mas eu fiz com partes diferentes para dar o total. Que legal isso!

A tarefa de estudo com o uso do material Cuisenaire proporcionou nos participantes a análise da composição de um total formado por partes maiores, menores ou iguais. Pode-se perceber na resolução do participante E17H (FIGURA 30b) que ele apresentou as partes em tamanhos diferentes relacionados com o valor proposto do problema da avaliação diagnóstica final.

b) Questão 3 – participante E09E

Quanto ao participante E09E, de quem foi analisada a questão 03, foi verificado que o mesmo não compreendeu o cálculo de divisão esperado (FIGURA

⁸ Os relatos dos participantes foram descritos na íntegra sem alterações pela autora da pesquisa.

32a) na questão da avaliação diagnóstica, que era obter a quantidade de páginas do livro para serem lidas igualmente no período de seis dias, deixando-a em branco.

FIGURA 32 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a,c) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 3

a) 3) Emily quer ler um livro de 84 páginas em 6 dias, lendo a mesma quantidade de páginas por dia. Quantas páginas ela deverá ler diariamente para alcançar seu objetivo?

b) 3) Luciana comprou um caderno de 200 folhas e quer usar para quatro matérias. Quantas folhas ela poderá usar para cada disciplina?

c) 1) No dia do seu aniversário, Márcia ganhou 65 reais de seu pai e 85 reais da sua tia. Quantos reais ela ganhou nesse dia?

FONTE: A autora (2019).

Já na questão 3da avaliação diagnóstica final (FIGURA 32b), o participante E09E compreende que o total deve ser separado em quatro partes, para isto, os registros indicam que utilizou primeiro a representação gráfica na interpretação e organização dos dados e, em seguida, realizou o cálculo para se certificar na imagem elaborada. A “delimitação da unidade de medida intermediária, como expressão do particular [...] é o elemento central de formação do conceito de multiplicação e divisão” (CRESTANI, 2016, p. 116). Pode-se perceber que o cálculo foi o segundo momento a ser realizado e que usou por primeiro a representação gráfica para solucionar o problema. Sendo que na avaliação diagnóstica inicial ele apontou o costume de apresentar o cálculo na parte central do espaço para resolução (FIGURA 32c).

Quanto à resolução da questão na avaliação diagnóstica final a unidade de básica é a folha do caderno que reunida por grupos de 50 folhas (as matérias do caderno) se torna a unidade de medida intermediária que facilita a contagem de grupos. Galdino (2017) apresenta a lei universal da multiplicação $z \cdot x = y$, no qual z é a quantidade de vezes que a unidade de medida básica se repete, x é a quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária se repete e, y é o total. Logo, $4 \cdot 50 = 200$, no qual 200 foram separados em quatro partes para obter a quantidade

de vezes que a unidade de medida intermediária se repete. Então, o participante E09E utilizou a operação inversa que é a divisão: $y \div x = z$, ou seja, $200 \div 4 = 50$ folhas para cada matéria, o que “converte as estruturas mentais iniciais em conceito, que fixa certa “célula” do objeto estudado” (DAVYDOV, 1988, p. 175), no caso a divisão.

Foi possível realizar a divisão em partes iguais porque “para que a operação seja possível, deve o dividendo ser múltiplo do divisor; caso contrário, não existe número inteiro e que satisfaça $c.b=a$ ” (CARAÇA, 1951, p. 22).

A representação gráfica pronta (FIGURA 32b) como solução do problema 3 da avaliação diagnóstica final pelo participante E09E não fornece indícios de como foi pensado por ele. Tem-se o relato de dois participantes (P1 e P2) e da professora-pesquisadora (PP) ao representarem graficamente e analisarem as sentenças matemáticas relacionadas à Questão 6 da tarefa de estudo com o uso do tangram sobre as informações do quadrado, no qual possibilite o entendimento da imagem separada em quatro partes iguais compondo o total.

PP (apontando para a representação gráfica do participante): Esse é o valor 6. Você colocou (a separação das partes) bem no meio. Por que você escolheu colocar no meio?

P1: Porque seis ...tipo ... é a metade de toda essa parte.

PP: E o que sobrou?

P1: É o b... é tipo... a metade da metade!

PP: Ah, entendi. Então é importante separar com o risquinho?

P1: Sim.

PP: Ele tem uma informação?

P1: sim.

PP: Por que tem um risquinho aqui? (apontando para o meio da representação gráfica). Quantas partes você tem que dividir?

P1: Três.

PP: Três partes. E elas têm alguma importância? O tamanho... assim, tem haver o tamanho da imagem com essa parte daqui? (apontando para a representação gráfica). O que você acha?

P1: Humm.

PP: Você colocou três partes. Eu concordo. Quais valores você vai colocar?

P1: O seis, b e b.

PP: (pergunta para o participante da mesma mesa) Depois que você dividiu, por que você colocou esse risquinho bem aqui no meio? (apontando na imagem).

P2: Porque se eu “fazer” $b+b$ fica igual aqui (apontando para as duas partes menores da imagem e indicando que é igual a metade maior)

PP: Ah, então é igual a metade?

P2: Aham.

PP: Ah, então quer dizer que essa parte é o 6 (apontando para a parte maior) e essa é parte 6? (apontando para as duas partes menores)

P2: Sim.

PP: Então se esse 6 é a soma de $b+b$, então dá 6?

P2: Sim.

PP: Essas partes são iguais ou diferentes?

P2: Iguais.

PP: Então quanto é a metade desses seis, se são duas partes iguais?
P2: Três.
PP: Então cada parte pode ser 4?
P2: Não.

Durante o relato dos dois participantes, a primeira forma de dividir o todo é ao meio e depois subdividir as partes. Nesta perspectiva, para a divisão das folhas sulfite proposta no problema (FIGURA 32b), subentende-se que o participante E09E dividiu 200 ao meio resultando em 100 e, após dividiu cada parte ao meio obtendo o valor 50. Também se pode verificar a ocorrência de separar primeiro ao meio e depois cada parte novamente ao meio ao utilizarem o material Cuisenaire (FIGURA 33).

Figura 33 - MATERIAL CUISENAIRE: TODO SEPARADO EM PARTES IGUAIS



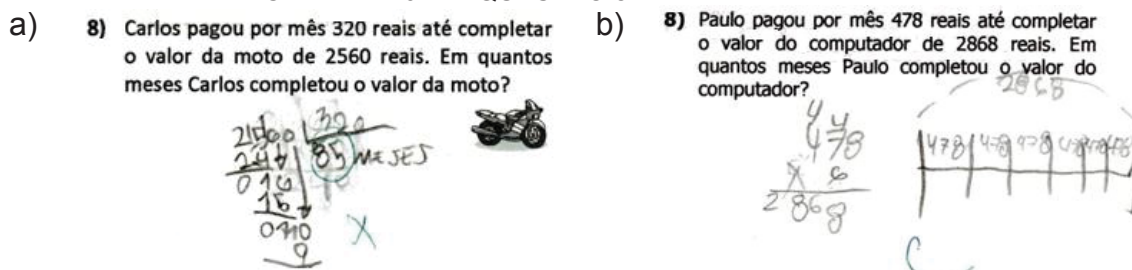
FONTE: A autora (2019).

As imagens da Figura 33 mostram que os participantes realizaram a primeira divisão do todo ao meio. E após construíram as próximas subdivisões para completar o todo. Atitudes que vêm a corroborar a representação gráfica apresentada na solução do problema aritmético proposto na avaliação diagnóstica final pelo candidato E09E.

c) Questão 8 – participante E04D

Na questão 8 da avaliação diagnóstica inicial os participantes precisavam obter a quantidade de meses a ser pago R\$ 320 reais para completar o pagamento total de R\$ 2560 reais. O participante E04D (FIGURA 34a) indicou a operação de divisão, mas cometeu erro de matemática básica. No entanto, na avaliação diagnóstica final (FIGURA 34b) ele apresentou os dados na forma de representação gráfica em seis partes indicando o tempo a ser pago e o valor de cada prestação. Realizou o cálculo de multiplicação para obter o valor total.

FIGURA 34 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 8



FONTE: A autora (2019).

É possível perceber na Figura 34b que, apesar de se esperar o cálculo de divisão a partir da imagem separada em partes, o participante buscou na multiplicação a solução para o problema proposto. A imagem (FIGURA 34b) organizada foi interpretada e aplicada a operação inversa ao problema da que se esperava. A representação gráfica elaborada na Figura 34b possui a função representacional designada por Dondis (2015 citada por VAZ; SILVA, 2016, p. 25), “a mensagem visual concreta e real em que seu entendimento se baseia na experiência do cotidiano visual”, como mensagem visual que o orientou na escolha da operação a ser realizada para o problema.

A solução do problema 8 apresentada por uma representação gráfica (FIGURA 34b) pelo participante E04D é composta por partes iguais para compor o total. Nas tarefas de estudo utilizando o material Cuisenaire e o tangram, havia análises sobre a constituição da imagem a partir de partes iguais. Tem-se no diálogo do participante (P1) e a professora-pesquisadora (PP) a identificação de partes iguais para compor o todo.

PP: Alguma dúvida?
 P1: Não sei o que é o T.
 PP: Onde?
 P1: Na primeira análise tem: T é igual a $a+a$.
 PP: O que seria a na sua imagem?
 P1: O $a+a$ são essas partes juntas. Ah, então T é o total?
 PP: O que você acha?
 P1: Que sim. T significa que você juntou essas duas partes. Então é o total.

Nesse diálogo pode-se perceber a conclusão do participante (P1) na adição de partes iguais para formar o todo. Identificou qual era a parte e, que esta se repete compondo o total. Desta maneira, o participante E04D interpretou o valor 478 como parte que deve ser repetida para compor o valor total de 2868 reais proposto no problema da avaliação diagnóstica final. Durante as tarefas de estudo com o material Cuisenaire foram elaboradas representações do todo por partes iguais (FIGURA 35).

FIGURA 35 - MATERIAL CUISENAIRE: O TODO FORMADO POR PARTES IGUAIS



FONTE: A autora (2019).

Com base na junção de partes iguais para compor o todo, o participante E04D identificou a parte, no caso a parcela mensal da moto, para compor o valor do total a pagar. E assim, indicando quantas parcelas a pagar.

d) Questão 11 – participante E32F

Na questão 11 da avaliação diagnóstica inicial (FIGURA 36a), o participante E32F realizou a soma das duas partes, apagou a operação e colocou metade do resultado. Na avaliação diagnóstica final, na questão 11 (FIGURA 36b) o participante E32F utilizou da representação gráfica para indicar as partes e o valor total e, em seguida, realizou a soma das três parcelas como forma de obter a quantidade 48.

FIGURA 36 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 11

- a) 11) Mariana foi até a papelaria e comprou um caderno de R\$ 18,00, um estojo de canetas por R\$ 15,00 e um livro. A compra foi de R\$ 72,00. Qual o preço do livro?

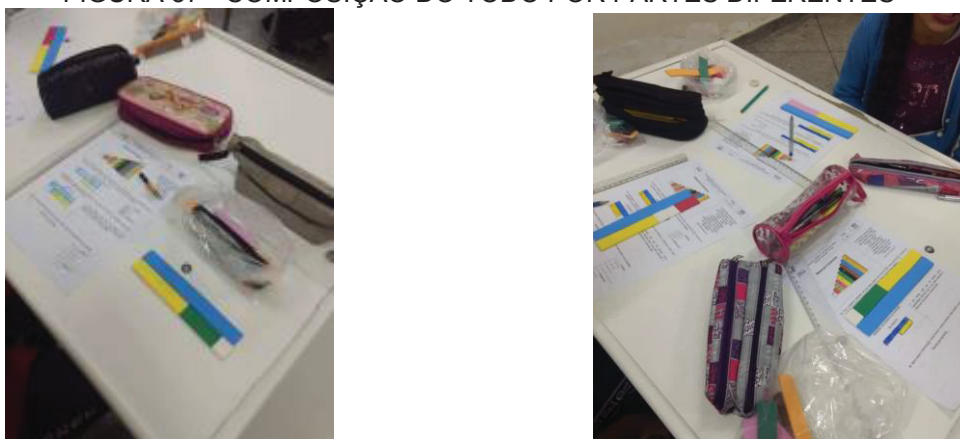
- b) 11) Sônia foi ao mercado e comprou uma caixa de sabão em pó por R\$ 16,00, um shampoo por R\$ 19,00 e um pacote de açúcar. A compra foi de R\$ R\$ 48,00. Qual o preço do pacote de açúcar?

FONTE: A autora (2019).

Esta questão 11 tem o todo separado em três partes com valores diferentes. Que contempla obter uma parte, tendo a informação do total e as duas outras partes. “Em tal movimento conceitual, está o fundamento qualitativo do número, pois o que está em foco é o conceito de adição e subtração” (ALVES, 2017, p. 124)

Dentre as tarefas de estudo desenvolvidas utilizando o material Cuisenaire, foi construído o todo por partes diferentes. Tendo sua representação gráfica e as análises sobre as partes, como desigualdade entre elas e a construção do todo (FIGURA 37).

FIGURA 37 - COMPOSIÇÃO DO TODO POR PARTES DIFERENTES



FONTE: A autora (2019).

Na Figura 37 é possível observar que o todo (barrinha azul) teve o mesmo comprimento elaborado por partes diferentes. Foi sugerido aos participantes que escolhessem uma possibilidade de composição de barrinhas para compor o tamanho designado. Não foram determinadas quantas barrinhas menores deveriam compor a barrinha azul. Na Figura 37 é possível verificar as diferentes combinações e quantidades de peças menores que os participantes utilizaram para compor a azul. Indicando que a adição de parcelas podem ser duas ou mais parcelas, iguais ou diferentes, para resultar num total. Pôde-se perceber a maneira de combinar as possibilidades das partes pelos participantes (FIGURA 38).

FIGURA 38 - COMBINAÇÃO DE PARTES PARA COMPOR O TOTAL



FONTE: A autora (2019).

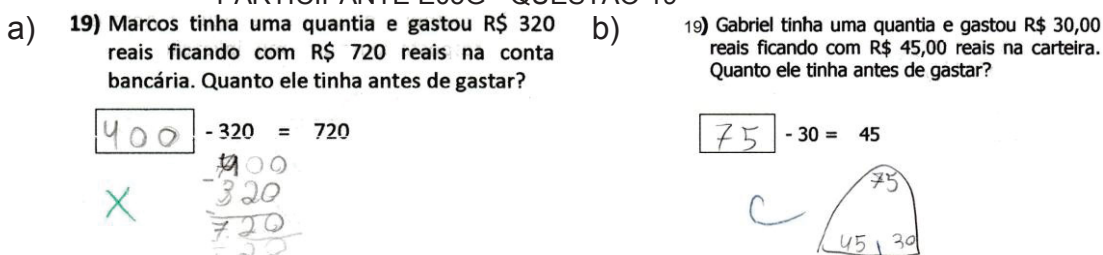
Na Figura 38 o todo foi organizado por barrinhas diferentes para compor o total. Não foi solicitada aos participantes essa quantidade de combinações, portanto

isto foi algo que chamou a atenção da professora-pesquisadora, ou seja, a percepção dos participantes em realizar essa estrutura de tamanhos diferentes compondo o mesmo total. Maneira que veio a ser apresentada pelo participante E32F na avaliação diagnóstica final.

e) Questão 19 – participante E05G

Na questão 19 da avaliação diagnóstica inicial (FIGURA 39a) esperava-se a utilização da operação inversa (adição), o que não ocorreu na execução pelo participante E05G.

FIGURA 39 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (a) E FINAL (b) DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 19



FONTE: A autora (2019).

No entanto, na Figura 39b o participante E05G representou graficamente os dados, identificou que uma parte foi retirada do valor total. Para obter o minuendo, no conjunto dos números naturais, deveria somar os valores 45 e 30. A decisão de somar os valores se deu pela análise da organização dos dados na representação gráfica.

A forma de representação vem ao encontro do “esquema davydoviano, para a interpretação de problemas de adição e subtração, a análise é mediada pela objetivação da situação, idealizada ou desenhada, mas no plano teórico” (MATOS, 2017, p. 54). Numa operação de subtração de números naturais, o primeiro valor na operação horizontal, o minuendo, deve ser o maior valor para ser retirada uma parte. Sendo o resultado apresentado na Figura 39b, o valor 45 é uma das partes que sobrou ao retirar uma parte do total.

Na última tarefa de estudo utilizando o material Cuisenaire, era necessário que o participante escolhesse um todo e sua composição por partes. Houve

participantes que preferiram a sobreposição do todo por partes para a construção da representação gráfica e o registro das análises (FIGURA 40).

FIGURA 40 - SOBREPOSIÇÃO DO TODO COM AS PARTES



FONTE: A autora (2019).

Nas análises dos participantes, pode-se verificar o entendimento deles de que as partes que compõem o todo devem ser menores para juntá-las e, que o todo sempre é o maior na subtração. No diálogo entre a professora-pesquisadora (PP) e o participante (P1) verifica-se essa análise.

P1: Prof, esse T é de total, né?
 PP: Isso. E esse total é formado de duas partes iguais ou diferentes?
 P1: Iguais.
 PP: Isso. Um total formado por duas partes iguais.
 P1: Só uma alternativa está errada.
 PP: Qual era?
 P1: O que a era maior que o todo.
 PP: Uma parte maior que o todo?
 P1: Impossível, né?!

O participante (P1) verificou que as partes são menores que o todo. Também ao realizar a sobreposição das partes menores no todo e realizar a retirada de uma barrinha, verificou-se a necessidade do todo ser a barrinha maior. No entanto, a representação gráfica apresentada pelo participante E05G na avaliação diagnóstica organizou a soma das partes para obter o todo, já que foi retirada uma quantia de um todo.

Com a representação gráfica na organização dos dados, foi possível realizar a interpretação do problema. A forma de organização feita pelo participante E05G na questão 19 da avaliação diagnóstica final (FIGURA 39b) gerou uma adequação visual para a realização da operação inversa, com cálculo mental.

f) Comentários gerais

Por meio da avaliação diagnóstica inicial, ao apresentar os exemplos, é possível perceber neste elemento de análise *representação gráfica na transformação dos dados de uma tarefa de estudo*, que os participantes não organizavam os dados, apresentavam cálculos diferentes ao esperado, cometiam erros ou deixavam em branco as questões propostas na avaliação diagnóstica inicial. Mas, a representação gráfica foi escolhida pelos participantes como um modo de resolver o problema.

Após a sequência de tarefas de estudo propostas é possível perceber que os participantes melhoraram seus desempenhos. Demonstrando assim, por meio uso da representação gráfica, ser esta uma ferramenta importante para organizar os dados, interpretá-los e, conseqüentemente, calcular corretamente a operação adequada ao problema.

De maneira geral, a Tabela 2 apresenta os dados obtidos com todos os participantes da pesquisa em relação às cinco questões apresentadas neste tópico.

TABELA 2 - TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Avaliação	Acertos	Parcial	Erros	Em branco
Questão 01	Inicial	114	8	2	0
	Final	114	8	2	0
Questão 3	Inicial	67	11	40	6
	Final	90	9	23	2
Questão 8	Inicial	45	5	59	15
	Final	52	3	56	13
Questão 11	Inicial	61	30	28	5
	Final	90	15	14	5
Questão 19	Inicial	57	3	47	17
	Final	78	3	33	10

FONTE: A autora (2019).

Isso demonstra que após a sequência de tarefa propostas utilizando a representação gráfica, os participantes melhoraram seu desempenho ao interpretarem a relação todo-partes dos dados do problema para a aplicação correta

da operação, buscando na representação gráfica um novo meio de resolver os problemas aritméticos.

4.4 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO MEDIADORA ENTRE AS INFORMAÇÕES DE UM PROBLEMA ARITMÉTICO AO CÁLCULO

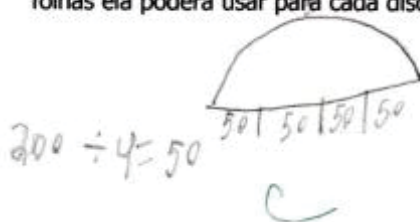
Este elemento de análise tem a representação gráfica como mediadora entre as informações de um problema aritmético e o cálculo. Para isto, são apresentados registros da avaliação diagnóstica final dos cinco participantes: a questão 3 do participante E09E, a questão 11 do participante E04D, a questão 12 do participante E05G, a questão 2 do participante E32F e a questão 6 do participante E17H.

a) Questão 3 – participante E09E

A representação gráfica foi um recurso que o participante E09E utilizou para organizar os dados de problema na questão 3 (FIGURA 41) ao estruturar as informações sobre a quantidade de folhas do caderno a serem distribuídas por matérias, obtendo a resposta esperada ao problema.

FIGURA 41 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 3

3) Luciana comprou um caderno de 200 folhas e quer usar para quatro matérias. Quantas folhas ela poderá usar para cada disciplina?



FONTE: A autora (2019).

Conforme a Figura 41, já apresentada anteriormente como Figura 32b, é possível observar que a primeira forma de registro do participante E09E foi a representação gráfica constituída de elementos visuais que “são manipulados com ênfase cambiável pelas técnicas de comunicação visual, numa resposta direta ao caráter do que está sendo concebido e ao objetivo da mensagem” (DONDIS, 2015, p. 23). Em seguida ele apresentou a operação $200 \div 4 = 50$ como formalização da resposta.

A representação gráfica apresentada pelo participante E09E (FIGURA 41) tem a quantidade, 200 folhas, separada em quatro partes e, em cada parte a quantidade de folhas por matéria. E, que, no entanto, é a solução esperada ao problema aritmético da avaliação diagnóstica final. Ele encontrou na representação gráfica uma maneira de resolver o problema.

As tarefas de estudo que envolviam a divisão de um todo em partes iguais, utilizando materiais manipuláveis, era apresentada pelos participantes com a primeira divisão ao meio e depois a divisão de cada parte (FIGURA 42). Na Figura 42, o todo tinha a primeira divisão ao meio, representada por duas barrinhas iguais. Após fez-se a divisão de cada metade, obtendo-se mais barrinhas e de mesmo tamanho. Mas, sempre formando o mesmo todo.

FIGURA 42 - DIVISÕES DO TODO EM PARTES IGUAIS



FONTE: A autora (2019).

Outra divisão do todo em partes iguais e menores é apresentada no diálogo do participante (P1) e da professora-pesquisadora (PP), na primeira tarefa de estudo envolvendo a representação gráfica (RG) do todo, de doze unidades, da imagem do geoplano.

PP: Me conte, como você achou rápido a sua representação gráfica? O que fez?

P1: Aqui tem 12 (apontando para a 1ª RG., no qual tem doze unidades a)

PP: Tá.

P1: Eu fui na metade (apontando para a 1ª RG). Aqui tipo... oh... aqui o *b* é dois espaços... ai eu fui contar (apontando para a 1ª RG) dois... faz o risco (ligando a 1ª RG com a 2ª RG) dois... faz o risco (novamente apontando a 1ª RG com a 2ª RG) aí eu fui fazendo. Nessa (apontando para a 2ª RG) eu

peguei a metade e puxei para baixo que a metade é (associando com a 3ª RG) de 6 é 3 aí eu puxei para baixo.

PP: Aqui você foi contando de 1 em 1 (apontando para a 1ª RG). A segunda você contou de quanto em quanto?

P1: No segundo eu contei de 2 em 2.

PP: E nessa daqui? (apontando para a 3ª RG)

P1: De dois (quis dizer que havia somente dois espaços divididos e pensou um pouco)

PP: Se você contou que essa parte daqui equivale a primeira (apontando a metade da RG da terceira imagem até a primeira) vamos colocar a régua (ligando os meios da 1ª e 3ª RG. O participante colocou a régua). Então se esse tamanho (na 3ª RG) tem esse tamanho (na 1ª RG) quantas unidades valem esse daqui? (apontando para a 1ª e 3ª RG)

P1: Seis.

PP: Então você contou de quanto em quanto?

P1: Seis

PP: Então você falou que aqui vale 6as (na 1ª RG) que vale aqui (na 3ª RG) certo? Então essa imagem você contou de 6 em 6?

P1: (pensou um pouco e pegou a régua) outra medida?

PP: Sim, você consegue outra medida?

P1: Você vem aqui na metade (do seis e apontando para a 3ª RG e associa com a 4ª RG) aqui no meio (da 3ª RG) e desce aqui e aqui que é a metade desses (apontando para a metade do 6 da 3ª RG) e cada tem duas medidas (associando como duas metades do 6 na 3ª RG)

PP: E agora tem 4 espaços?

P1: Sim.

PP: E se fizer a associação desse (na 4ª RG com a 1ª RG) de quantos você contou?

P1: (pegou a régua e associou as regiões) aqui deu 3 em 3.

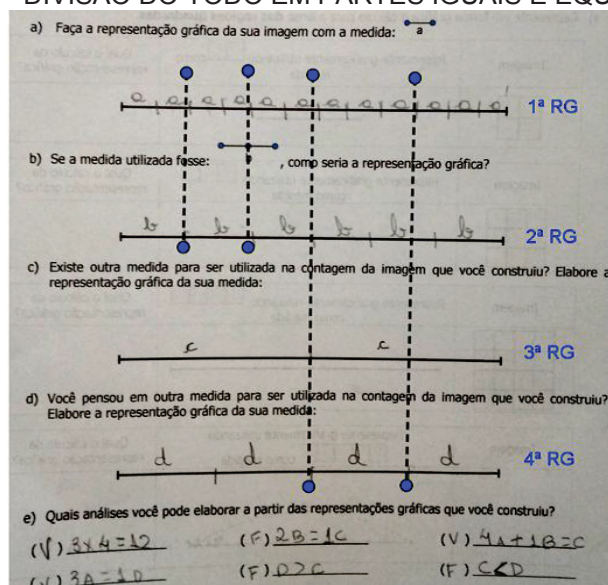
PP: Ficou de 3 em 3. Muito bem! Então 4 vezes o número 3?

P1: Que dá 12.

PP: Muito bem!

A Figura 43 é a tarefa de estudo do participante (P1), na qual os segmentos pontilhados foram acrescentados para indicar seu diálogo entre as representações gráficas e a posição da régua para o cálculo das medidas equivalentes.

FIGURA 43– DIVISÃO DO TODO EM PARTES IGUAIS E EQUIVALENTES



FONTE: A autora (2019).

A maneira de dividir por primeiro ao meio e depois a subdivisão de cada parte, apresentada na tarefa de estudo envolvendo o material Cuisenaire e do geoplano, nas Figuras 42 e 43, vem a corroborar a maneira com que o participante E09E construiu a representação gráfica como forma de responder ao problema proposto na questão 3 da avaliação diagnóstica final.

b) Questão 11 – participante E04D

A proposta da questão 11 era a de obter uma das partes, tendo como informações duas partes e o total. O problema era referente a uma compra de três produtos no mercado. O participante E04D utilizou a representação gráfica para organizar os dados do problema (FIGURA 44) e realizou a soma de dois produtos à qual depois acrescentou a terceira parcela que completa o total. Ao final somou o valor dos três produtos para certificar o resultado final da compra.

FIGURA 44 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 11

11) Sônia foi ao mercado e comprou uma caixa de sabão em pó por R\$ 16,00, um shampoo por R\$ 19,00 e um pacote de açúcar. A compra foi de R\$ R\$ 48,00. Qual o preço do pacote de açúcar?

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 16 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ + 13 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ - 19 \\ \hline 29 \end{array}$$

FONTE: A autora (2019).

A representação gráfica foi fundamental para a realização das três operações. A sequência dos cálculos apresentada na Figura 44 tem origem da interpretação das informações organizadas e a confirmação da soma de toda compra, ou seja, 48 reais. Pode-se notar que o participante não utilizou a subtração para obter o último valor da compra. Utilizou a soma de modo a completar o valor total.

Nas tarefas de estudo utilizando o material Cuisenaire e o tangram havia a transformação da imagem, por barrinhas ou peças do tangram, em representação gráfica. Entre elas a junção de partes diferentes para compor o total (FIGURA 45).

FIGURA 45 - COMPOSIÇÃO DO TODO EM PARTES DIFERENTES



FONTE: A autora (2019).

O uso da representação gráfica como mediadora do problema ao cálculo vem ao encontro do estudo de Davydov (1988) sobre as características internas do objeto que há no conteúdo do modelo de estudo. Verificou-se na Figura 45 que a composição de três barrinhas diferentes equivale ao tamanho da barrinha azul. Foi realizado um processo de composição de tamanhos diferentes, assim como, o participante E04D na questão 11 da avaliação diagnóstica (Figura 44) não utilizou a subtração como forma de obter o terceiro valor e, sim como forma de obter o terceiro valor em compor o valor total da compra.

c) Questão 12 – participante E05G

Na questão 12 da avaliação diagnóstica final (FIGURA 46), foi possível perceber que o participante E05G “conversou” com os dados do problema. Fato demonstrado pelo ponto de interrogação entre os algarismos dois e quatro que representa o total 248 km. A leitura a ser realizada nesse processo é a de que o participante indicou o total a ser obtido por “?” e, após o cálculo, indicou o valor no topo da imagem na Figura 46.

FIGURA 46 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 12

12) Douglas e sua família estavam viajando e pararam para almoçar. Douglas verificou que já viajaram 165 Km. Após almoçarem, teriam 83 Km até chegar ao destino. Qual a distância total da viagem?

$$\begin{array}{r} 165 \\ + 83 \\ \hline 248 \end{array}$$

FONTE: A autora (2019).

Como a representação gráfica está à esquerda na Figura 46, se confirma as afirmações de Alves (2017) em que o “desenho com os arcos se constitui em um esquema que mediará a definição simultânea das duas operações (adição e subtração), bem como da identificação do todo e das partes” (ALVES, 2017, p. 91).

Ao utilizar o ponto de interrogação na representação gráfica, o participante E05G interpretou e indicou o valor a ser obtido, ou seja, $165 + 83 = ?$. Em todas as tarefas de estudo a professora-pesquisadora realizou perguntas aos participantes sobre a construção das imagens utilizando os materiais manipuláveis associando-as à representação gráfica (FIGURA 47).

FIGURA 47 - QUESTIONAMENTO SOBRE AS CONSTRUÇÕES E REPRESENTAÇÕES



FONTE: A autora (2019).

Durante as tarefas de estudo os participantes eram questionados pela professora-pesquisa, a qual “desempenha o papel de orientador coparticipe que instiga os estudantes a elaborarem questões que contribuam com as reflexões

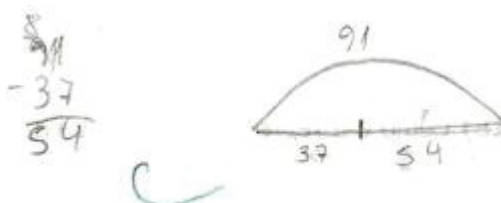
coletivas e individuais para atingir o propósito da tarefa em desenvolvimento” (MATOS, 2017, p. 54). O fato de ser motivado a análises e reflexões, fez com que o participante E05G utilizasse o ponto de interrogação para o resultado do problema. Sendo assim, a representação gráfica foi uma forma de interpretação para a solução da questão da avaliação diagnóstica final.

d) Questão 2 – participante E32F

A proposta da questão 2 da avaliação diagnóstica final foi a de obter uma das partes, tendo o valor total e a quantidade de livros que restaram após uma doação. Na Figura 48, o participante E32F representou graficamente o valor 37, o total 91 e “?” em uma das partes. Após resolver a operação de subtração, ele escreveu o valor que representa a quantidade doada de 54 livros.

FIGURA 48 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 2

2) O professor Luís tinha 91 livros. Resolveu doar alguns livros para a escola onde trabalha e ficou com 37. Quantos livros ele doou?



FONTE: A autora (2019).

É possível perceber a relação de desigualdade apresentada na representação das partes. A quantidade de 37 livros indica a quantidade menor que lhe restou e a maior parte expressa a maior quantidade de livros doados. O total de livros (91) do professor Luís foi representado com um arco mencionando as duas partes juntas. Essa forma de representar com o arco vem a corroborar ao estudo de Alves (2017) que declara que “[...] a inserção de um novo elemento, o arco, contribuirá para a evidência da relação todo-partes por meio do modelo”(ALVES, 2017, p. 89). Assim, do total (91) foi doado uma parte, resultando na quantidade de livros que lhe restou.

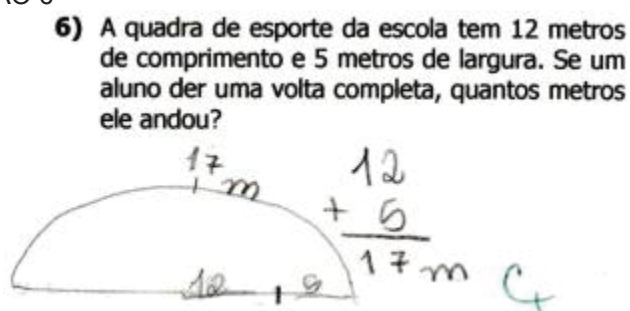
A indicação de uma das partes pelo ponto de interrogação contribui para a formação do pensamento algébrico, ao indicar por meio de significações na busca

de um valor aritmético de uma grandeza que se quer medir ou contar, recorrendo ao caráter geral (ROSA, 2012), no qual a representação gráfica orienta a interpretação e elaboração de forma algébrica a sentença: $37 + ? = 91$ ou $91 - 37 = ?$.

e) Questão 6 – participante E17H

A questão 6 da avaliação diagnóstica final do participante E17H (FIGURA 49) nos mostra a importância de representar graficamente. Os dados do problema foram indicados na imagem, obtendo na representação gráfica subsídios para a interpretação correta sobre o perímetro. Essa forma de representação vem ao encontro de que “um bom desenho, em resumo, constitui a melhor expressão visual possível da essência de ‘algo’” (WONG, 2010, p. 41).

FIGURA 49 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E17H - QUESTÃO 6



FONTE: A autora (2019).

O participante E17H teria condições de obter o resultado final se tivesse interpretado as informações que a representação gráfica lhe informou, no entanto o conceito de perímetro não estava apropriado, visto que o resultado apresentado foi de semiperímetro.

f) Comentários gerais

Por meio da avaliação diagnóstica final, ao apresentar os exemplos, é possível perceber neste elemento de análise *a representação gráfica como mediadora entre as informações de um problema aritmético ao cálculo*, que os participantes encontraram na representação gráfica uma forma de interpretar as estruturas internas que compõem os dados do problema para a aplicação da operação proposta e, uma maneira de resolver o problema aritmético.

Após a sequência de tarefas propostas pôde-se perceber que os participantes melhoraram seus desempenhos, demonstrando, por meio da representação gráfica uma ferramenta importante para organizar os dados, interpretá-los e, conseqüentemente, calcular corretamente a operação adequada ao problema.

De maneira geral, a Tabela 3 apresenta os dados obtidos com todos os participantes da pesquisa em relação às cinco questões da avaliação diagnóstica final apresentada neste tópico.

TABELA 3 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO FINAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Acertos	Parcial	Erros	Em branco
Questão2	95	7	20	2
Questão3	90	9	23	2
Questão6	51	46	26	1
Questão11	90	15	14	5
Questão 12	96	8	14	6

FONTE: A autora (2019).

Com o uso da representação gráfica na organização e interpretação dos dados dos problemas os participantes conseguiram bons resultados para a solução esperada aos problemas aritméticos.

4.5 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE TAREFAS PARTICULARES

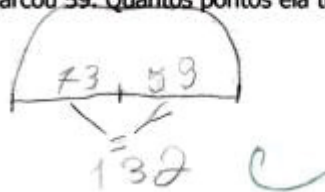
Para este elemento de análise *a representação gráfica na resolução de um sistema de tarefas particulares*, verifica-se a representação gráfica como a primeira escolha de resolução na qual os participantes abdicaram o cálculo tradicional (cálculo vertical). Para isto, são apresentados os registros da avaliação diagnóstica final de quatro participantes: a questão 1 do participante E05G, a questão 9 do participante E09E, a questão 19 do participante E05G, a questão 12 do participante E32F, a questão 3 do participante E04D. A questão do participante E17H não foi selecionada por ter questões parecidas de solução e ficar repetido aos demais participantes.

a) Questão 1 – participante E05G

O participante E05G resolveu a questão 1 (FIGURA 50) da avaliação diagnóstica final com o uso da representação gráfica indicando os valores nas duas partes e, ainda, com o sinal de igualdade para a junção desses valores.

FIGURA 50 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 1

1) Marina estava jogando vídeo-game e marcou 73 pontos na primeira fase. Na segunda ela marcou 59. Quantos pontos ela tem ao todo?



$$\begin{array}{r} 73 + 59 \\ \hline 132 \end{array}$$

FONTE: A autora (2019).

Pela Figura 50, ao elaborar a representação gráfica, o participante E05G interpretou os dados e realizou o cálculo mental por decomposição para indicar o todo. Essa forma de representação gráfica vem ao encontro de que “a linguagem visual constitui a base de criação do desenho” (WONG, 2010, p. 41). A interpretação das informações na representação gráfica foi fundamental para a forma de obter o resultado.

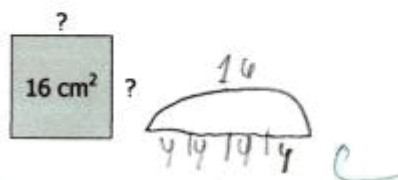
b) Questão 9 – participante E09E

Para o cálculo da medida do lado de um quadrado sendo conhecido o valor da área, o participante E09E usou a representação gráfica (FIGURA 51) para apresentar os valores que geram 16 cm^2 . Nela há a informação da medida do lado e de quantas vezes se repete para obter o todo.

Essa forma de representação vem ao encontro dos estudos de Hobold (2014) e Matos (2017) sobre as unidades que geram a lei da relação universal da multiplicação: “A quantidade de vezes que a unidade de medida básica se repete no agrupamento denomina-se unidade de medida intermediária e, com base nessa media, é que conseguimos [...] determinar o valor do todo” (MATOS, 2017, p. 73).

FIGURA 51 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E09E - QUESTÃO 9

9) Qual é a medida do lado da região quadrada para que seja completada por dezesseis quadradinhos de 1 cm^2 ?



FONTE: A autora (2019).

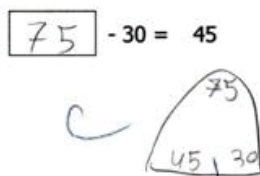
Assim, a representação gráfica (FIGURA 51) do participante E09E está dividida em quatro partes e mais o arco com o valor 16. Cada parte do segmento representa um conjunto (4 cm^2) da unidade básica (1 cm^2) e, este repetido quatro vezes ($4\text{ cm}^2 \times 4$), gerando o total de 16 cm^2 .

c) Questão 19 – participante E05G

Em relação à operação inversa, a representação gráfica foi determinante na organização dos dados para identificar qual operação deveria ser realizada. Fato que pode ser verificado na resolução da questão 19 da avaliação diagnóstica final (FIGURA 52) pelo participante E05G.

FIGURA 52 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E05G - QUESTÃO 19

19) Gabriel tinha uma quantia e gastou R\$ 30,00 reais ficando com R\$ 45,00 reais na carteira. Quanto ele tinha antes de gastar?



FONTE: A autora (2019).

O participante E05G, não utilizou o algoritmo usual na forma vertical e, sim realizou cálculo mental a partir da representação gráfica. Isso confirma as afirmações de Alves (2017) de que “as ações objetual e gráfica são indispensáveis para alcançar o desenvolvimento no plano mental, isto é, a base para promover

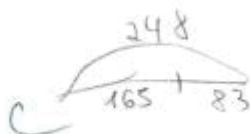
mentalmente as operações de adição e subtração relacionadas entre si” (ALVES, 2017, p. 128).

d) Questão 12 – participante E32F

O participante E32F, ao utilizar a representação gráfica para a resolução da questão 12 da avaliação diagnóstica final (FIGURA 53), organizou os dados do problema utilizando segmentos como parte de cada trajeto, indicando o valor 165 (quantidade de quilômetros percorridos) e o valor 83 (quantidade de quilômetros que faltam para percorrer e finalizar a viagem).

FIGURA 53 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E32F - QUESTÃO 12

12) Douglas e sua família estavam viajando e pararam para almoçar. Douglas verificou que já viajaram 165 Km. Após almoçarem, teriam 83 Km até chegar ao destino. Qual a distância total da viagem?



FONTE: A autora (2019).

O participante E32F não apresentou os cálculos na forma vertical indicado pela soma das duas parcelas. Compreendemos que essa representação gráfica o orientou na junção das duas parcelas realizando o cálculo mental para indicar no arco da representação gráfica o valor total de 248 quilômetros à distância percorrida na viagem.

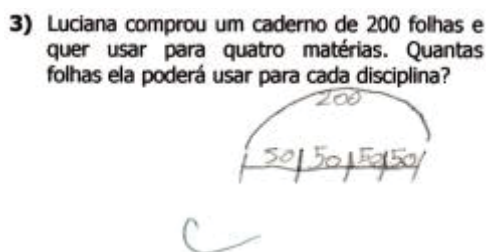
Esta forma de organização das partes na representação gráfica vem ao encontro das informações dos dados do problema, na qual “há um zelo nessa interrelação, pois o segmento menor sempre representará a quantidade menor, da mesma forma ocorre para o segmento maior, que corresponde à quantidade maior” (ALVES, 2017, p. 163).

e) Questão 3 – participante E04D

O participante E04D, na questão 3 (FIGURA 54) da avaliação diagnóstica final, leu o problema proposto e apresentou a solução utilizando a representação

gráfica. Apresentou o valor das 200 folhas como sendo o total e as separou em quatro matérias. Sendo cada parte indicada com o valor 50. Não seguiu o padrão de elaborar a divisão apresentando o dividendo, divisor, quociente e resto na forma padrão utilizando a “chave”. Estes termos da divisão aparecem indicados na representação gráfica. Questão também já apresentada na Figura 32b e na Figura 41 do participante E09E. Porém, o participante E04D utilizou somente a representação gráfica como uma maneira de apresentar a solução do problema, diferente dos outros anteriores que apresentaram a representação gráfica junto com cálculos próximos.

FIGURA 54 - REGISTRO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL DO PARTICIPANTE E04D - QUESTÃO 3



FONTE: A autora (2019).

Os termos da divisão aparecem na representação gráfica apresentada na resolução da questão 3 do participante E04D (FIGURA 54). O dividendo são as 200 folhas, o divisor 4 são as quatro partes que representam as matérias, o quociente 50 representa as folhas que contem em cada matéria e, o resto zero, não sobrando folhas. Separar em quatro partes iguais significa que cada disciplina terá a mesma quantidade de folhas que as demais.

Para que esta forma de organização dos dados na representação gráfica seja possível “deve o dividendo ser múltiplo do divisor, caso contrário, não existe número inteiro e que satisfaça $c.b=a$ ” (CARAÇA, 1951, p. 22).

f) Comentários gerais

Por meio da avaliação diagnóstica final, ao apresentar os exemplos, é possível perceber neste elemento de análise *a representação gráfica na resolução de um sistema de tarefas particulares*, que os participantes utilizaram da representação gráfica para organizarem, interpretarem e apresentarem o resultado proposto ao problema.

Após a sequência de tarefas propostas é possível perceber que os participantes melhoraram seus desempenhos. Demonstrando, por meio uso da representação gráfica, que esta é uma ferramenta importante para organizar os dados, interpretá-los e, conseqüentemente, calcular corretamente a operação adequada ao problema.

De maneira geral, a Tabela 4 apresenta os dados obtidos com todos os participantes da pesquisa em relação às cinco questões da avaliação diagnóstica final apresentada neste tópico.

TABELA 4 - TABULAÇÃO DAS AVALIAÇÕES DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Acertos	Parcial	Erros	Em branco
Questão 1	114	8	2	0
Questão 3	90	9	23	3
Questão 9	83	2	33	6
Questão 12	96	8	14	6
Questão 19	78	3	33	10

FONTE: A autora (2019).

A tabela demonstra que mais de 50% dos participantes conseguiram resolver corretamente as questões analisadas. Também, percebemos que houve o cálculo mental e a organização dos dados para a identificação da operação correta por meio da representação gráfica.

4.6 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO PROCESSO DE ENSINO

Este elemento de análise consiste na construção da composição de informações da relação todo-partes a serem representadas graficamente para orientar os participantes no conteúdo do conceito que envolve o modelo estudado.

Assim, é apresentada como a representação gráfica estava presente na sequência de tarefas de estudo desenvolvida pela professora-pesquisadora, em cinco propostas diferentes usando materiais manipuláveis: quatro utilizaram materiais manipuláveis (Material Cuisenaire, Tangram, Régua, Geoplano) e uma envolvia problemas aritméticos.

A pesquisa aplicada pela professora-pesquisadora foi uma abordagem diferente ao que os participantes têm de suas aulas regulares. A primeira tarefa de estudo utilizando o material Cuisenaire foi desenvolvida em quatro aulas para cada turma. Foi a tarefa de estudo que mais ocupou tempo pelo fato de os participantes terem dificuldade em compreender o estudo em grupo para a realização de construção das imagens e análises. Após entenderem o desenvolvimento da proposta, as demais tarefas de estudo demandaram menos tempo. Para a tarefa de estudo envolvendo tangram foram utilizadas duas aulas por turma, régua e geoplano usaram uma aula por turma, e os problemas aritméticos com representação gráfica utilizaram duas aulas.

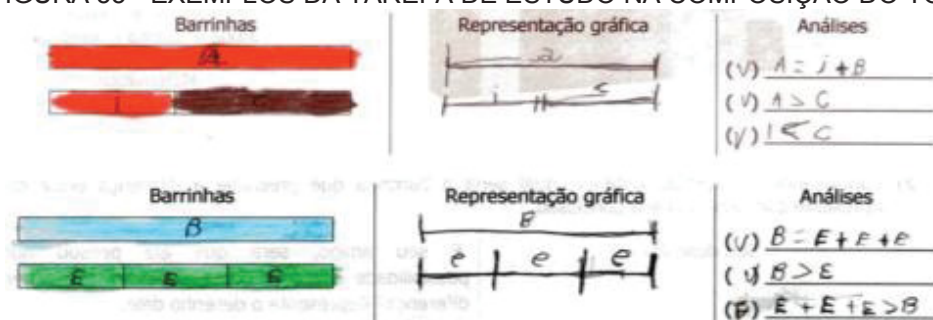
a) Material Cuisenaire:

Nesta tarefa de estudo os participantes utilizaram o Material Cuisenaire para responder as questões propostas. Para representar graficamente os dados, os participantes precisaram:

- 1) Analisar a relação de desigualdade entre duas barrinhas,
- 2) Identificar a 3ª barrinha que completava a desigualdade,
- 3) Analisar a relação de desigualdade entre as três barrinhas,
- 4) Fazer a representação gráfica da composição do todo-partes utilizando a forma algébrica que representa cada barrinha.

A Figura 35 são exemplos da tarefa de estudo usando o material Cuisenaire no qual a construção do todo por partes utilizando as barrinhas são transformadas em representação gráfica e, em seguida os participantes realizam as análises na forma de verdadeiro (v) ou falso (f).

FIGURA 55 - EXEMPLOS DA TAREFA DE ESTUDO NA COMPOSIÇÃO DO TODO



FONTE: A autora (2019).

A proposta de representar graficamente a relação todo-partes é para que os participantes observem a composição das informações, em partes diferentes ou iguais. Ao escreverem análises sobre a relação todo-partes, as partes iguais geram análises de adição, multiplicação e divisão. Já nas partes diferentes, as análises elaboradas foram de adição e subtração. O uso do Material Cuisenaire propõe ações objetivas na forma de decomposição do todo em partes e a composição das partes no todo, no qual Davydov (1982) considera fundamental a relação todo-partes, entre grandezas, para a interpretação de problemas.

b) Tangram:

A tarefa de estudo com o uso do tangram é transformar as informações da imagem composta pelas peças poligonais.

No início, os participantes aprenderam o processo de composição de novos polígonos para obter outro. Esse procedimento apresenta o afirmado por Nacarato (2004) em que o uso do tangram “possibilita diferentes rotações, composições e decomposições, ampliando o repertório de representações possíveis não apenas para o quadrado, como também para a de outros polígonos” (NACARATO, 2004, p. 4). A cada tarefa os participantes foram questionados pela professora-pesquisadora sobre a relação de desigualdade e/ou igualdade entre as peças solicitadas e registraram suas análises (FIGURA 56).



FONTE: A autora (2019).

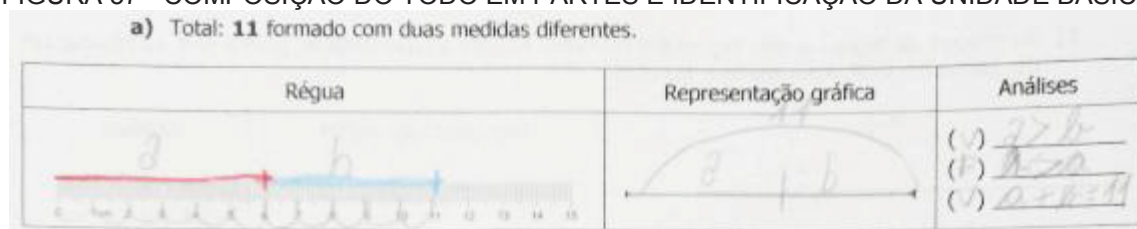
A representação gráfica das informações compostas pelas peças do tangram é relacionada proporcionalmente ao tamanho. As imagens propostas na tarefa possuem uma metade inteira e a outra parte subdividida em partes menores, na qual a representação gráfica é elaborada a partir destas informações, gerando informações como dobro e metade.

c) Régua:

Foi proposta aos participantes a tarefa de estudo sobre a leitura e o uso da régua. As primeiras imagens das régua já possuíam demarcações. Eram segmentos de reta compondo a relação todo-partes.

As tarefas começaram com a identificação da unidade básica (1 cm) para a contagem e formação de cada segmento. Após registrar o valor de cada segmento, essas medidas foram representadas graficamente, ocorrendo, assim, a identificação do terceiro valor que é a junção (total) do valor das duas medidas iniciais (FIGURA 57).

FIGURA 57 - COMPOSIÇÃO DO TODO EM PARTES E IDENTIFICAÇÃO DA UNIDADE BÁSICA



FONTE: A autora (2019).

Na Figura 57, pôde-se verificar a composição de partes para formar o todo e, também a contagem por unidade básica marcado na contagem dos centímetros.

A composição do segmento de reta formado por partes diferentes possibilita a identificação da operação de soma e subtração de medidas. “A representação da relação todo-partes, fundamento do sistema adição/subtração, também traz o conteúdo de equação, caracterizada pelo sinal de igualdade” (ALVES, 2017, p. 117). Assim como com partes iguais é possível desenvolver as operações de multiplicação, divisão, dobro, metade, triplo, terça parte das medidas.

d) Geoplano:

A proposta inicial da tarefa de estudo envolvendo o geoplano foi a de construir uma imagem ligando os preguinhos com lã. A imagem formada foi desenhada na malha pontilhada da folha de questões. Tanto para o geoplano como para a malha pontilhada deveriam ser utilizada a linha na horizontal ou vertical, excluindo-se a linha diagonal. Como os pregos (no geoplano) e os pontos (na malha

pontilhada) possuem a mesma distância na vertical e na horizontal, então a unidade de medida é a mesma em relação ao seu material.

A proposta foi a composição da relação todo-partes na qual as partes são iguais. A imagem desenvolvida no geoplano e na malha pontilhada foi representada graficamente com as unidades que compõem cada segmento.

Os participantes foram questionados se havia a possibilidade de representar graficamente o mesmo total utilizando medidas iguais, mas diferentes da inicial, surgindo, assim, novas unidades de medida intermediária. Logo, as diferentes representações gráficas foram mediadoras das diferentes maneiras de escrever o mesmo todo, desenvolvendo o conceito de multiplicação.

Em um segundo momento com o uso do geoplano, foi solicitado que os participantes demarcassem uma figura quadrada para o estudo de área. Mudando a proposta de medida linear para a medida de área. Na tabulação da avaliação diagnóstica inicial, a questão 9 foi a que teve a maior quantidade de erros. Foram 92 questões erradas dos 124 participantes da pesquisa. A questão estava relacionada ao valor total de 25 cm^2 e foi solicitada a medida do lado do quadrado. As respostas erradas apresentadas nos mostram o desconhecimento do conteúdo do conceito.

Para isto, com base nos estudos de Galdino (2016), foram usados pela professora-pesquisadora quadrados feitos de E.V.A. para o desenvolvimento da aula. A cada passo foram realizadas perguntas a todos para que verificassem: a unidade de medida básica (um quadrado), a quantidade de vezes que a unidade de medida básica se repetia (três quadrados: unidade de medida intermediária), a quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária se repetia, o total e o formato da imagem.

Utilizar a representação gráfica para o assunto de área é representar a unidade de medida intermediária e a quantidade em que esta se repete. Também, na representação gráfica pode-se concluir de forma geral que uma parte que representa a unidade intermediária possui a mesma quantidade de partes que compõe o total.

e) Problemas

São problemas aritméticos propostos contendo duas partes para serem respondidas. Em primeiro momento há duas representações gráficas prontas para serem identificadas com (x), as quais possuem os dados do problema de maneira

correta, relacionando os valores como parte e/ou total. Pois, o “problema envolve leitura com identificação e interpretação da ideia conceitual que determinará qual operação é pertinente para a sua resolução” (ALVES, 2017, p. 174).

A representação gráfica tem a função comunicativa dos dados do problema relacionando-o com todo-partes. Orientam o pensamento teórico sobre os conceitos envolvidos, a qual operação fundamental aplicar. Por último, a realização da operação esperada ao problema. Procedimento de verificação para o professor no processo de ensino-aprendizagem.

4.7 ELEMENTO DE ANÁLISE: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA APRENDIZAGEM

Para este elemento de análise *a representação gráfica na aprendizagem*, verificou-se a aceitação dos participantes da pesquisa no uso da representação gráfica para a organização dos dados, orientando-os na aplicação da operação e como forma de resolução dos problemas aritméticos.

A Tabela 5 apresenta a quantidade de questões que os participantes (E04D, E09E, E32F, E05G e E17H) tiveram: acertos, parcial, erros e as questões deixadas em branco, bem como a verificação de questões da avaliação diagnóstica inicial, dos cinco participantes da pesquisa, com o uso de desenhos, imagens e representação gráfica como meio de resolver os problemas.

TABELA 5 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO INICIAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Acertos	Parcial	Erros	Em Branco	Questões com imagens, desenhos ou representações gráficas
E04D	7	3	11	0	0
E09E	6	2	1	11	0
E32F	5	3	12	0	0
E05G	7	2	11	0	0
E17H	1	3	14	2	0

FONTE: A autora (2019).

Observando a Tabela 5, nenhuma questão havia indicações de imagens, desenhos ou representações gráficas que os orientassem para a organização dos dados e a resolução adequada ao problema proposto.

Cabe ressaltar que a avaliação diagnóstica inicial possuía 20 questões, das quais cinco questões tinham desenhos para orientá-los à resposta (números: 2, 4, 6, 16 e 17). Também, das 20 questões, 12 tinham imagens ilustrando o problema (números: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15). Das 20 questões, duas tinham espaço dentro da operação para ser colocado o valor (números: 18 e 19). Somente uma questão (número 20) era de marcar (x), não havendo desenho, imagem ou representação gráfica.

Na Tabela 6 é apresentada a quantidade de questões da avaliação diagnóstica final com o uso da representação gráfica dos cinco participantes (E04D, E09E, E32F, E05G e E17H).

TABELA 6 - TABULAÇÃO DA AVALIAÇÃO FINAL DOS PARTICIPANTES PARA ANÁLISE

Participante	Tabulação dos participantes na avaliação diagnóstica final (pontuação geral das 20 questões)				Dentre as 20 questões da avaliação diagnóstica final, 16 questões foram construídas com a representação gráfica pelo participante.			
	Acertos	Parcial	Erros	Em branco	Acertos	Parcial	Erros	Em branco
E04D	12	1	7	-	10	1	5	-
E09E	9	4	6	1	7	3	5	1
E32F	11	2	7	-	9	2	5	-
E05G	14	4	2	-	10	4	2	-
E17H	9	5	6	-	6	5	5	-

FONTE: A autora (2019).

A avaliação diagnóstica final possuía 20 questões. Destas, quatro questões já possuíam representação gráfica com os dados do problema para ser colocado o valor esperado (4, 16, 17 e 20). Logo, eram 16 questões nas quais só havia o problema e nenhuma representação gráfica. Destas, só a questão 9 tinha a imagem do quadrado. No entanto, ela foi contabilizada como questão aberta.

Ao analisar a Tabela 6, comparando-a com a Tabela 5, os cinco participantes melhoraram seu desempenho na avaliação diagnóstica final. Na Tabela 6 é possível perceber que a evolução de seus resultados está associada com o uso da representação gráfica para a organização dos dados e aplicação da operação

esperada ao problema, o que, segundo Davydov (1988), está associada com as conexões internas por meio da relação todo-partes.

Em relação à Tabela 6, sobre as 16 questões abertas para o uso da representação gráfica, foi considerado: acerto com o cálculo e representação gráfica correta, parcial com representação correta, mas com erros de matemática básica, erros com representação gráfica e cálculos errados, e em branco nenhuma representação ou cálculo.

Assim, neste elemento de análise *a representação gráfica na aprendizagem*, foi possível observar a melhora nos resultados dos participantes, o que foi oportunizado pela sequência de tarefas de estudo, cujo o objetivo era desenvolver a composição de informações na forma de representação gráfica e de analisar a relação todo-partes, auxiliando-os na interpretação dos dados para aplicação da operação esperada ao problema aritmético. Logo, podemos considerar a representação gráfica como um recurso didático que auxilia na aprendizagem de resolução de problemas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar essas considerações finais dessa pesquisa, trazemos o esboço de conceituação de Góes (2013) sobre Expressão Gráfica, que é

[...] um campo de estudo que utiliza elementos de desenhos, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, **representar**, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. (GÓES, 2013, p. 20 – grifos meus).

Destaca-se na citação acima o *representar*, pois a vivência da professora-pesquisadora no Ensino Fundamental dos Anos Finais demonstra a dificuldade ou ausência dos estudantes em organizarem os dados e/ou ideias para chegarem a um resultado final. Em muitos casos, os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam algoritmos corretos, mas não esperado ao problema.

Assim, havia como questão norteadora desta pesquisa: a organização dos dados na forma de representação gráfica pode auxiliar na compreensão da relação todo-partes, ou seja, a representação gráfica como recurso didático contribui para a resolução de problemas aritméticos e como organização de conceitos da interpretação para o cálculo?

Foi a partir deste questionamento que se definiu o objetivo geral, que era o de analisar de que maneira a representação gráfica pode ser um recurso didático para a resolução de problemas aritméticos.

A partir disto, iniciaram-se as buscas nas bases de dados e não encontramos o tema representação gráfica no ensino da Matemática. No entanto, após algumas buscas, conhecemos o estudo de Galdino (2016) que investigou o conhecimento matemático dos estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação. A autora utilizou esquema construído por elementos que constituem a relação universal dos conceitos de multiplicação, tendo como base a teoria histórico-cultural. Foi a partir deste estudo de Galdino (2016) que tivemos conhecimento de Davydov (1988) e da Teoria Desenvolvimental, que, em poucas palavras, busca desenvolver o pensamento teórico dos estudantes.

A partir desta teoria, conhecemos outras pesquisas que buscam gerar o conhecimento teórico e científico dentro dos conteúdos de Matemática, utilizando de

esquemas e representações para o movimento geral-particular-singular orientado pela relação universal.

Como primeiro instrumento de coleta de dados para alcançar o objetivo da pesquisa, os participantes foram submetidos à avaliação diagnóstica inicial com 20 problemas aritméticos. A tabulação dos resultados nos mostrou que a maioria dos participantes não organizava os dados do problema e, ainda, possuíam dificuldades de interpretação.

Pensando nisto, foi desenvolvida uma sequência de tarefas de estudo com o auxílio de material manipulável. Nessas tarefas, a composição realizada com os materiais manipuláveis foi transformada em representação gráfica, indicando cada parte que constituiu o todo.

Após a sequência de tarefas de estudos, foi aplicado novo instrumento de coleta de dados, a avaliação diagnóstica final, com 20 questões semelhantes à primeira avaliação diagnóstica. Com a análise desse instrumento, foi possível verificar melhora no desempenho dos participantes, principalmente pelo aumento da quantidade de questões em que a representação gráfica se fez presente para a organização dos dados e, até mesmo, só a representação gráfica com o resultado. Também se pôde verificar que participantes com baixo desempenho e que não usavam desenhos ou imagens nas questões da avaliação diagnóstica inicial, passaram a organizar os dados do problema na forma de representação gráfica e melhoraram seus resultados.

Como isso, é possível afirmar, assim como Dondis (2015), que a linguagem que a imagem transmite é uma informação. Ainda, transformar uma informação, no caso os problemas aritméticos, em representação gráfica é analisar as conexões internas da relação universal na proposta de Davydov (1988). Segundo Dondis (2015), não é o simples enxergar, mas é compreender os significados que a mensagem visual oferece ao receptor.

Deste modo, é possível afirmar que objetivo desta pesquisa, por meio das análises do capítulo anterior, foi alcançado, uma vez que indicamos cinco aspectos da utilização da representação gráfica, que definimos como elementos de análises: a representação gráfica na transformação dos dados de uma tarefa de estudo; a representação gráfica como mediadora entre as informações de um problema aritmético ao cálculo; a representação gráfica na resolução de um sistema de tarefas

particulares; a representação gráfica no processo de ensino; e a representação gráfica na aprendizagem.

No processo de pensamento, segundo Vygotsky, tem-se algumas etapas, dentre elas o signo e o significado. Quanto aos signos, esses “podem ser definidos como elementos que representam ou expressam outros objetos, eventos, situações” (OLIVEIRA, 1995, p. 30). Deste modo, as representações gráficas utilizadas pelos participantes na pesquisa tiveram a função de representar as informações obtidas nas imagens com o material manipulável. Já, quanto ao significado, ele se refere “ao sistema de relações obtidas que se formou no processo de desenvolvimento” (OLIVEIRA, 1995, p. 50) dos signos, o que na presente pesquisa tem-se a representação gráfica como um signo que corresponde os objetos e, que possui significado nas relações destes signos para o processo de ensino e aprendizagem entre grandezas do problema esperado.

Góes (2013), Wong (2010) e Dondis (2015) utilizam o representar como um meio que transmite uma mensagem e que serve a um propósito. Para esta pesquisa foi uma maneira de organizar os dados ou, ainda, como solução do problema aritmético pelos participantes do 6º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Desta forma, podemos afirmar que representação gráfica é um recurso didático que proporciona o elo de interpretação dos dados do problema, auxiliando na compreensão do significado da relação entre quantidades, conforme os dados apresentados, por meio do uso da representação gráfica.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. D. S. B. **O modo davydoviano de organização do ensino para o sistema conceitual de adição e subtração**. Criciúma, 202p., 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Extremo Sul Catarinense.

ARAUJO, M. N. **Organização do ensino da matemática na educação infantil: análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal de ensino**. Criciúma, 189p., 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Extremo Sul Catarinense.

ASSUMPCAO, M. P. **Que tipo de pensamento a escola tem desenvolvido nos educandos?** Uma análise das tarefas escolares do eixo números e operações. 25/04/2018 143 f. Mestrado em EDUCAÇÃO. Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, Maringá Biblioteca Depositária: BCE - Biblioteca Central da UEM

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <<http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/>>, Acessado em: 28 fev. 2018.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. **Ministério da Educação**: 2018. Disponível em: <<http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/>>, Acessado em: 28 fev. 2018.

BURIGO, L. S. M. **Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo**. Criciúma, 153p., 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Extremo Sul Catarinense.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**, Lisboa, 1951.

CARDOSO, C.T.; GÓES, A.R.T.; A representação gráfica como recurso didático na resolução de problemas aritméticos – uma proposta de pesquisa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – SINECT, **Anais**. Ponta Grossa, 2018.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico**: uma reflexão a partir do conceito de divisão. Tubarão, 125p., 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

CURITIBA. Diretrizes Curriculares para a Educação Municipal de Curitiba, Vol. 3. **Curitiba: SME-PMC, 2006.**

DAVÍDOV⁹, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.** Moscou: Progreso, 1988.

DAVÝDOV¹⁰, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** (3ª ed) (M. Shuare, Trans.) Habana: Editorial Pueblo y Educación. (Obra original publicada em 1982).

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.** Trad. Marta Shuare. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V. O que é a atividade de estudo. **Revista Escola inicial.** n. 7, 1999.

DONDIS, D. A., **Sintaxe da linguagem visual.** 3ª ed. São Paulo. Ed. Martins Fontes, 2015.

ELAM, K. **Geometria do design:** Estudo sobre proporção e composição. Tradução Cláudio Marcondes; Cosac Naify; São Paulo; 2010.

FREITAS, DAIANE DE. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração'** 17/02/2016 167 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE.

GALDINO, A. P. D. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação:** um estudo com base na teoria histórico cultural. Tubarão, 112p., 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

GÓES, H. C. Um esboço de conceituação sobre expressão gráfica. **Educação Gráfica**, v.17 – nº 01. 2013.

GÓES, A. R. T.; GÓES, H.C. **A expressão gráfica na formação docente.** Práticas pedagógicas nos Pibids Matemática/UFPR e Física/IFPR. Curitiba; Appris, 2017.

⁹ Na obra original de 1988 a escrita é Davídov e escolhemos a escrita Davydov para a dissertação.

¹⁰ Na obra original de 1982 a escrita é Davýdov e escolhemos a escrita Davydov para a dissertação.

GÓES, A. R. T.; GÓES, H.C, A expressão gráfica como tecnologia educacional na educação matemática. Recursos didáticos para o processo de ensino-aprendizagem na educação básica. In: BRITO, G. d. S.; ESTEVAM, M.; CAMAS, N.P.V. (orgs). **Metodologias pedagógicas inovadoras: contexto da educação básica e da educação superior**. Curitiba. Editora UFPR, 2018, p. 106-118.

GUIMARAES, M. A. **Organização do processo de ensino do conceito de número nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise histórico-cultural**. 10/08/2018 155 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS, Goiânia Biblioteca Depositária: PUC Goiás

GUIMARAES, S. U. **Sentidos e significados a partir de práticas de geometria na perspectiva lógico-histórica explicitados por estudantes do 6º ano em situações desencadeadoras de aprendizagem** 26/02/2018. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, São Carlos Biblioteca Depositária: Repositório UFSCar

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética**. Tubarão, 201p., 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

HOBOLD, E. S. F.; Rosa, J. E . Da. O ensino da tabuada no contexto das ações de estudo propostas por Davýdov e colaboradores. **Rev. Bras. Educ.**, vol. 22, nº71, Rio de Janeiro. 2017.

JANUARIO, G. **Materiais manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos**. Universidade Estadual de Londrina/PR. Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná, 2008.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VYGOTSKY, L.S., LURIA, A. R., LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone. 1992

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: A teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Rev. Bras. Educ.** [online]. 2004, n.27, pp.5-24.

LIBÂNEO, J. C. Formação de Professores e Didática para Desenvolvimento Humano. **Educ. Real**. vol.40 no.2 Porto Alegre Apr./June 2015 Epub Mar 20, 2015.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov – Três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. Eixo temático 3. Cultura e práticas escolares. **IV Congresso Brasileiro de História da Educação**. Goiás, 2006.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vasily Vasilievich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). Ensino **desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: Editora Edufu, 2013, v. 1, p. 315-350.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MARQUES, F.; FLORES, P.; SOUTO, A. P. **Desenho e representação**. Universidade do Minho. Escola de Engenharia. Portugal. 2017.

MANSUTTI, M. A. Concepção e produção de materiais instrucionais em Educação Matemática. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo. SBEM. Ano 1. Número 1, setembro de 1993, p. 17-29.

MATOS, C. F. **Modo de organização do ensino de matemática em cursos de pedagogia**: uma reflexão a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural. Tubarão, 139p., 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

MOYA, P. T. **Princípios para a organização do ensino de matemática no primeiro ano do ensino fundamental**. Maringá, 167p., 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá.

MUNARI, B. **Design e comunicação visual**. São Paulo; M. Fontes, 2001.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo. SBEM. Ano 9, Número 9-10 (2004-2005).

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: Ed. USFCar, 2003.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky: Aprendizagem e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico.** São Paulo; Scipione, 1995.

PERDRIZET, M.P. **Os homens da pré-história.** Tradução de Christina Binato; São Paulo, Scipione, 1994.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, 2012.

ROSA, J. E. da; DAMAZIO, A.; SILVEIRA, G. M.O Sistema de Numeração nas Tarefas Propostas por Davýdov e seus Colaboradores para o Ensino de Matemática. **Bolema** vol.28 no.50 Rio Claro Dec. 2014

SANTOS, C. D. O. D. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino.** Tubarão, 89p., 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

SERCONEK, G. C. **Teoria do ensino desenvolvimental e aprendizagem: um experimento com conceitos de área e de perímetro** 29/03/2018 191 f. Doutorado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, Maringá Biblioteca Depositária: BCE - Biblioteca Central da UEM

SILVA, A. J. DE O. E. **Aprendizagem do conceito fração:** um experimento de ensino baseado na teoria do ensino desenvolvimental. 23/08/2018 164 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS, Goiânia Biblioteca Depositária: PUC Goiás

SILVA, V. P. **Formação dos conceitos relativos aos números racionais no 6º ano do ensino fundamental:** uma proposta experimental. Uberaba, 108p., 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Uberaba.

SILVEIRA, G. M. **Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração.** Tubarão, 188p. 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Sul de Santa Catarina.

SOUSA, V. G. de. **Realidade e possibilidades da prática docente em Matemática nos anos iniciais**: um estudo mediado pelas proposições davydovianas. Teresina, 221p., 2014. Tese (Doutorado) – Fundação Universidade Federal do Piauí

VAZ, D. A. de F.; PEREIRA, N.C.S. Formação do Conceito de Volume nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um experimento didático formativo baseado na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvidor. **Bolema**, vol.31 no. 58 Rio Claro Aug. 2017

VAZ, A; SILVA, R. **Fundamentos da linguagem visual**. Curitiba; InterSaberes, 2016.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S.; LEONTIEV, A. N; LÚRIA, A. R. **A linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução: Maria Penha Villalobos. São Paulo. Ícone: Edusp, 1998.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução: Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

WONG, W. **Princípios de forma e desenho**. Tradução: Alvamar Helena Lamparelli. 2ª ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2010.

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nós, Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes e Prof^a Cristiane Terezinha Cardoso, pesquisadores da Universidade Federal do Paraná, solicitamos autorização para os estudantes do 6º Ano da Escola Municipal ###, participarem de um estudo intitulado: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS, que será aplicado nas aulas de Matemática. O estudo é importante para observarmos a representação gráfica como ferramenta de apoio no processo de ensino aprendizagem dos conteúdos da matemática.

a) O objetivo desta pesquisa é investigar as contribuições da representação gráfica como recurso didático na resolução envolvendo operações aritméticas, no processo de ensino aprendizagem dos conteúdos de matemática do 6º ano do ensino fundamental II.

b) Com esta pesquisa buscamos inserir metodologias para o ensino da matemática que atendam às necessidades dos estudantes na aprendizagem de operações matemáticas.

c) Caso o senhor(a) autorize a participação do seu/sua filho(a) nesta pesquisa: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS, ele/ela será submetido(a) a uma avaliação diagnóstica, atividades didáticas, coleta de dados como: foto e vídeo. O nome do seu/sua filho(a) e o rosto não serão demonstrados.

d) Para tanto, caso o(a) senhor(a) concorde com essa participação, deverá assinar este termo.

e) É necessário que o/a participante da pesquisa compareça na Escola Municipal ###, no período em que frequenta as aulas regulares para a realização das atividades na sala de matemática junto com a pesquisadora e a/o professor(a) regente.

f) A pesquisa não possui riscos diretos em relação à saúde dos participantes. É um estudo que envolve atividades de matemática que serão orientados pela pesquisadora e professora regente. Os riscos, no ambiente escolar, podem ser o deslocamento de sala ou materiais escolares do(a) aluno(a). Ou atitudes individuais do próprio participante de desconforto, constrangimento e retraimento.

g) O benefício esperado com essa pesquisa é a melhora no aprendizado dos conteúdos da disciplina de matemática.

h) Se você ou os responsáveis por você tiverem dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados a ele, você deve contatar a pesquisadora Cristiane Terezinha Cardoso pelo e-mail: ### e o Dr. Anderson Roges Teixeira Góes, professor da UFPR, pelo e-mail: ###. A pesquisadora Cristiane Terezinha Cardoso poderá ser contatada ainda na Escola Municipal ###, Rua: ###, de segunda a sexta-feira das 13h00min às 17h30min ou pelo telefone ### e o Pesquisador professor Dr. Anderson Roges Teixeira Góes no Setor de ###º andar, no Gabinete do Departamento de Expressão Gráfica, segunda à sexta-feira ou pelo telefone ###. Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, você pode

contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP/SD) do Setor de Ciências da Saúde da Universidade Federal do Paraná, pelo telefone ###.

i) Seu consentimento para a realização deste estudo é voluntário e se o(a) senhor(a) não quiser mais que o estudante faça parte da pesquisa poderá desistir a qualquer momento e solicitar que lhe devolvam o termo de consentimento livre e esclarecido assinado e o termo de assentimento livre e esclarecido.

j) As informações relacionadas ao estudo serão conhecidas somente pelos responsáveis pela pesquisa. No entanto, se qualquer informação for divulgada em relatório ou publicação, isto será feito sob forma codificada, para que a identidade do participante seja preservada e seja mantida a confidencialidade.

k) Os materiais obtidos, como imagens e vídeos, serão utilizados unicamente para essa pesquisa e serão destruídos ao término do estudo, dentro de cinco anos.

l) As despesas necessárias para a realização da pesquisa não são de sua responsabilidade e com a participação do estudante no estudo o senhor(a) não receberá qualquer valor em dinheiro. Terá a garantia de que problemas como: desconforto, constrangimento e retraimento que possa ocorrer nas aulas, decorrentes do estudo, serão tratados na própria escola.

m) Quando os resultados forem publicados, não aparecerá nome do participante, e sim um código.

Eu, _____ li esse termo de consentimento e compreendi a natureza e objetivo do estudo do qual concordei que o estudante sob minha responsabilidade possa participar. A explicação que recebi menciona os riscos e benefícios. Eu entendi que o estudante é livre para interromper a participação a qualquer momento sem justificar sua decisão. Eu entendi o que será feito durante a pesquisa e fui informado que o estudante será atendido sem custos para mim se ele apresentar algum problema dos relacionados no item “i”.

Eu concordo voluntariamente que o estudante sob minha responsabilidade participe deste estudo.

Assinatura do Pai ou Responsável Legal - Curitiba,

____/____/____

Assinatura do Pesquisador Responsável - Curitiba,

____/____/____

APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do Projeto: A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÕES ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS.

Pesquisadores Responsáveis: Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes e Prof^a Cristiane Terezinha Cardoso

Local da Pesquisa: Escola Municipal #####
Endereço: Rua: #####

O que significa assentimento?

Assentimento significa que você, menor de idade, concorda em fazer parte de uma pesquisa. Você terá seus direitos respeitados e receberá todas as informações sobre o estudo, por mais simples que possam parecer.

Pode ser que este documento denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

Informação ao participante

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa. O objetivo desse estudo é de analisar se representar por uma reta graficamente com valores na organização das ideias do problema para lhe ajudar a entender qual é o cálculo a ser aplicado nos problemas de matemática.

Com esta pesquisa buscamos colocar novas estratégias para o ensino dos conteúdos de matemática que atendam a compreensão dos estudantes para a aprendizagem das operações matemáticas.

Esta pesquisa é importante para entender se usando uma reta, que representa um desenho de valores, lhe ajudará a compreender e aplicar corretamente os cálculos necessários dos problemas de matemática.

O benefício esperado com essa pesquisa é a sua melhora em aprender e compreender os conteúdos da disciplina de matemática, principalmente a aplicação adequada do cálculo a partir da interpretação realizada por uma reta numérica com valores, que chamamos de representação gráfica.

O estudo será desenvolvido com uma avaliação diagnóstica e atividades didáticas para a resolução dos cálculos com o auxílio da reta, usando valores para ajudar a compreender os problemas de matemática. Haverá gravação de vídeo e imagem durante as atividades. Lembrando que a sua identidade será mantida em segredo com o uso de tarjas no rosto. As gravações serão destruídas após o término da pesquisa.

Que devo fazer se eu concordar voluntariamente em participar da pesquisa?

Caso você aceite participar, será necessário frequentar as aulas de matemática que serão em sala de aula e na sala ambiente de matemática. A sua participação é voluntária. Caso você opte por não participar não terá nenhum prejuízo nas aulas.

Participante da Pesquisa

Pesquisado Responsável Prof. Dr. Anderson Roges Teixeira Góes

Pesquisadora Responsável Prof^a Cristiane Terezinha Cardoso



Contato para dúvidas

Se você ou os responsáveis por você tiverem dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados a ele, você deve contatar a pesquisadora Cristiane Terezinha Cardoso, pelo e-mail: ### e o Dr. Anderson Roges Teixeira Góes, professor da UFPR, e-mail: ###.

A pesquisadora Cristiane Terezinha Cardoso poderá ser contatada ainda na Escola Municipal ###, Rua: ###, de segunda a sexta-feira das 13h00min às 17h30min ou pelo telefone ### e o Pesquisador professor Dr. Anderson Roges Teixeira Góes no Setor de ##, segunda à sexta feira ou pelo telefone ###.

Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, você pode contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP/SD) do Setor de Ciências da Saúde da Universidade Federal do Paraná, pelo telefone ###.

APÊNDICE C - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

	Operações aritméticas 6° ano	Código: _____	
---	---------------------------------	---------------	---

- 1) No dia do seu aniversário, Márcia ganhou 65 reais de seu pai e 85 reais da sua tia. Quantos reais ela ganhou nesse dia?

- 2) Luíza tinha 82 quilos e durante seis meses emagreceu e ficou com 64 quilos. Luíza eliminou quantos quilos por mês?



2 Kg

4 Kg

- 3) Emily quer ler um livro de 84 páginas em 6 dias, lendo a mesma quantidade de páginas por dia. Quantas páginas ela deverá ler diariamente para alcançar seu objetivo?



- 4) Quantos pontos há na figura? Apresente a resposta como uma multiplicação.

- 5) (OBMEP) Alvimar pagou uma compra de R\$ 3,50 com uma nota de R\$ 5,00 e recebeu de troco moedas de R\$ 0,25. Quantas moedas ele recebeu?



- 6) Um técnico pediu para seus jogadores darem uma volta completa em torno do campo de futebol. Qual foi a distância que eles correram?

65 m



65m

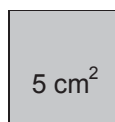
- 7) A professora de Ciências tem 64 alunos para formar equipes com quatro alunos para apresentarem a Feira de Ciências. Quantas equipes estarão apresentando?



- 8) Carlos pagou por mês 320 reais até completar o valor da moto de 2560 reais. Em quantos meses Carlos completou o valor da moto?



- 9) Uma região quadrada tem 25 cm^2 de área. Qual é a medida do lado desta região quadrada?



- 10) Num jogo de basquete, o time do Santos fez 27 pontos a mais que o Palmeiras que marcou 84 pontos. Quantos pontos o time do Santos marcou?



11) Mariana foi até a papelaria e comprou um caderno de R\$ 18,00, um estojo de canetas por R\$ 15,00 e um livro. A compra foi de R\$ 72,00. Qual o preço do livro?



12) A família Silva pretende fazer uma viagem de 210 quilômetros. Durante a viagem o motorista percebeu que já haviam percorrido 170 quilômetros. Quantos quilômetros ainda faltam para chegar ao destino?



13) Um fogão está sendo vendido por R\$ 450,00 reais. A loja oferece uma forma diferenciada para pagar. O cliente pode pagar R\$ 130,00 no dia da compra e o restante em quatro prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?



14) Um cinema tem a capacidade para 120 pessoas. O local é formado por cadeiras enfileiradas. Uma fileira tem 15 cadeiras. Quantas fileiras têm no cinema?



15) Amanda comprou 6 livros do mesmo preço e pagou com uma nota de R\$ 50,00 reais. Qual foi o preço de cada livro se ela recebeu R\$ 2,00 reais de troco?



16) Qual é o valor indicado pela seta?

17) O sapinho salta 3 metros cada vez. Qual operação matemática você representaria o salto total do sapinho?



18) Qual é o valor que está faltando?

$$340 + \boxed{} = 715$$



19) Marcos tinha uma quantia e gastou R\$ 320 reais ficando com R\$ 720 reais na conta bancária. Quanto ele tinha antes de gastar?

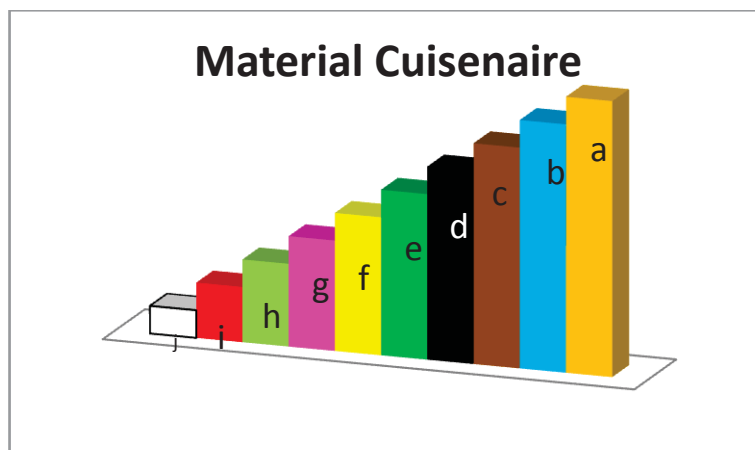
$$\boxed{} - 320 = 720$$

20) Uma semana tem sete dias. Cada dia tem 24 horas. Quantas horas têm uma semana? Calcule e em seguida marque a alternativa correta:

- () 168 horas
() 169 horas
() 170 horas

APÊNDICE D–TAREFA DE ESTUDO – MATERIAL CUISENAIRE

	Sequência didática: Operações aritméticas Material Cuisenaire - 6º ano	Código: _____	
---	---	---------------	---



As barrinhas coloridas foram confeccionadas e criadas pelo professor belga: Emile-Georges Cuisenaire (1891 – 1980).

O material, também chamado de Escala Cuisenaire, é simples e ajuda a criança a construir conceitos básicos de Matemática.

(<http://www.utfpr.edu.br>)

- 1) Com o material Cuisenaire em sua mesa, pegue uma barrinha **[b]** e uma barrinha **[f]**. Desenhe as barrinhas no espaço em branco e, junto com seu colega, marque suas análises:

Desenho das barrinhas

Análises

- () $b > f$
 () $b = f$
 () $b < f$
 () f é metade de b

- 2) Continuando o exercício anterior, qual seria a barrinha que preenche a diferença entre elas? Apresente com desenho sua conclusão.

Seu desenho

E seu amigo, será que ele pensou numa possibilidade diferente que a sua para preencher a diferença? Represente o desenho dele.

- 3) Agora pegue a barrinha **[a]** e tente formar o mesmo tamanho dela usando cores repetidas:

Desenho das barrinhas

Análises

- () $a = 2.f$
 () $a = 5.i$
 () $a = f + f$
 () $a = i + i + i + i + i$
 () i é metade de f
 () $f = 2.i$

- 4) Agora pegue e junte as barrinhas h e f . Tem uma barrinha que representa o total delas? Desenhe essa situação. Também podemos representar os desenhos por um segmento.

Desenho das barrinhas

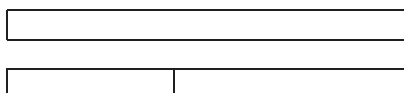
Representação gráfica

Análises

- () $h > f$
 () $f = h$
 () $f + h = c$
 () $f > h$

- 5) Nas próximas situações você deverá combinar as barrinhas da mesa para obter as sugestões das barrinhas sem cores. Pinte conforme as cores das barrinhas que você juntou para responder:

Barrinhas

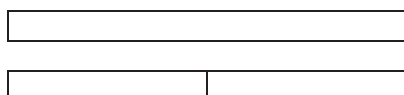


Representação gráfica

Análises

- () _____
 () _____
 () _____

Barrinhas

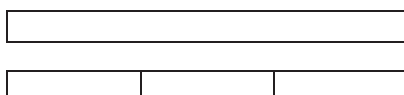


Representação gráfica

Análises

- () _____
 () _____
 () _____

Barrinhas

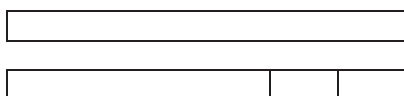


Representação gráfica

Análises

- () _____
 () _____
 () _____

Barrinhas

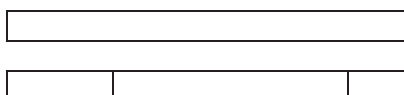


Representação gráfica

Análises

- () _____
 () _____
 () _____

Barrinhas





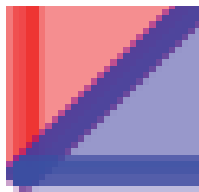
Representação gráfica

Análises

- () _____
 () _____
 () _____

APÊNDICE E - TAREFA DE ESTUDO – TANGRAM

	Operações aritméticas Tangram - 6º ano	Código: _____	
---	---	------------------	---



Tangram é um antigo jogo chinês, que consiste na formação de figuras e desenhos por meio de 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Não se sabe exatamente quando o jogo surgiu, embora exista uma lenda sobre tal criação. Segundo a mesma, um imperador chinês quebrou um espelho, e ao tentar juntar os pedaços e remontá-lo, percebeu que poderia construir muitas formas com seus cacos.

(mundoeducacao.bol.uol.com.br/curiosidades/tangram.htm)

As peças do tangram não possuem as letras que estão representadas na imagem acima. As letras foram colocadas para nossa tarefa! As cores podem não ser a mesma do material da sua mesa. Os formatos são os mesmos!

- 1) Com o tangram da sua mesa, pegue os formatos $[a]$ e junte. Desenhe o formato que você conseguiu e depois marque suas análises:

Desenho que você formou

O desenho do seu colega foi diferente?
Desenhe

Análises

() $T = a + a$

() $\frac{a}{2} = T$

() $T = a \cdot a$

() $a > T$

- 2) Para formar o quadrado da região $[c]$ será necessário pegar qual região? Represente por desenho a sua construção:

Desenho

Análises

() $b > c$

() $c > b$

() $2b > c$

() $2b = c$

() $V = 2b + c$

() $V = 2b - c$

() $c = V - 2b$

- 3) Quais regiões diferentes podem preencher o espaço em branco? Elabore com o tangram da sua mesa e depois complete o desenho.

Desenho



Análises

() $a < c$

() $c = 2b$


() $a = 2b + c$

() $a > 2b + c$


() $T = a + 2b + c$

() $\frac{c}{2} = b$

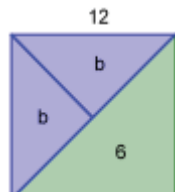
- 4) Uma forma de representar desenhos é pela representação gráfica por um segmento. Complete as informações no segmento colocando as letras correspondentes ao desenho:

	Representação gráfica	Análises
		() $e = d$
		() $e > d$
		() $e = 2 d$
		() $T = e + 2 d$
		() $\frac{e}{2} = d$
		() $e = T - 2 d$
<p>Você acha que os espaços que estão marcados no segmento estão divididos corretamente? Por quê?</p> <hr/> <hr/> <hr/>		

- 5) No próximo desenho você deverá colocar as informações na representação gráfica e criar três análises que vocês elaboraram sobre a imagem representada pelos triângulos do tangram:

	Representação gráfica	Análises
		() _____
		() _____
		() _____

- 6) E se as peças do tangram fossem representadas por valores, qual seria a representação gráfica da imagem abaixo?



	Representação gráfica	Análises
		() $b > 6$
		() $2 b = 6$
		() $b = 4$
		() $6 + 2 b = 12$
		() $(12 - 6) \div 2 = b$
		() $b = 3$

- 7) Analise a seguinte história:

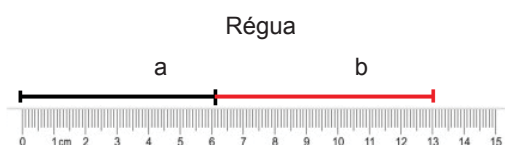
Luíza decidiu comprar um forno elétrico que custa R\$ 350,00. Na loja ela pagou R\$ 300,00 e o restante em mais duas prestações iguais.

- Qual é o valor total? _____
- Qual é a primeira parte do pagamento? _____
- Qual é o valor das outras partes do pagamento? _____
- Represente graficamente com os valores da forma de pagamento:

APÊNDICE F - TAREFA DE ESTUDO – RÉGUA

	Operações aritméticas Régua - 6º ano	Código: _____	
---	---	------------------	---

- 1) Na imagem da régua há dois segmentos coloridos. Elabore a representação gráfica com as informações das partes e o total. Após analise e marque:



Quanto mede o segmento a? _____

Quanto mede o segmento b? _____

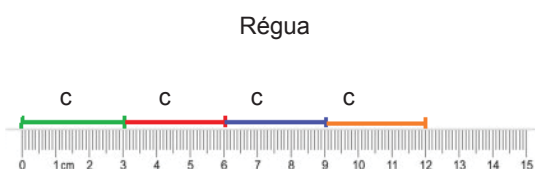
Representação gráfica



Análises

- ☐ $a > b$
☐ $a = b$
☐ $a < b$
☐ $13 = a + b$
☐ a é o total
☐ b é uma parte

- 2) Um segmento foi separado em partes iguais. Represente graficamente as informações da reta numérica. Após marque suas análises:



Quanto mede cada segmento c? _____

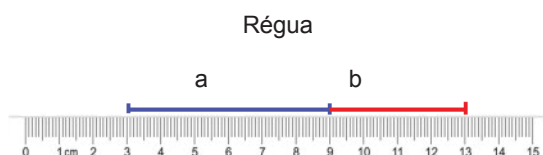
Representação gráfica



Análises

- ☐ $4c = 12$
☐ $c + c + c + c = 12$
☐ $\frac{12}{4} = c$
☐ $c = 12 : 4$
☐ c é uma das partes
☐ 12 é o total

- 3) Dois segmentos estão representados numa parte da reta. Represente graficamente as informações da reta numérica. Após marque suas análises:



Quanto mede o segmento a? _____

Quanto mede o segmento b? _____

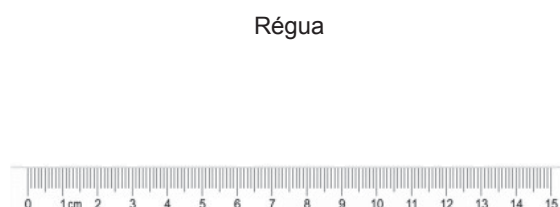
Representação gráfica



Análises

- ☐ $a < b$
☐ $a = 2b$
☐ $a > b$
☐ $a + b = 10$
☐ $a + b = 13$
☐ a é o total
☐ b e a são partes

- 4) Foram utilizadas duas medidas diferentes na régua numérica. Represente graficamente de duas maneiras diferentes as informações. Após faça suas análises marcando:



Quanto mede o segmento a? _____

Quanto mede o segmento b? _____

Representação gráfica





Análises


- ☐ $b > a$
☐ $b = 2a$
☐ $b = a + a$
☐ $b = 5$
☐ $b = 3$
☐ $3b = 15$
☐ $6a = 15$
☐ $a = 2$
☐ $a = 2,5$

Agora é sua vez de elaborar os segmentos na reta! Será indicado o total e quantos segmentos. As medidas você elaborará para obter o total indicado. Utilize cores diferentes!

a) Total: 11 formado com duas medidas diferentes.

Régua	Representação gráfica	Análises
		() _____ () _____ () _____



b) Total: 14 formado com três medidas diferentes.

Régua	Representação gráfica	Análises
		() _____ () _____ () _____



c) Total: 13 formado com duas medidas iguais e uma diferente.

Régua	Representação gráfica	Análises
		() _____ () _____ () _____

d) Total: 12 formado com três medidas iguais.



Régua	Representação gráfica	Análises
		() _____ () _____ () _____

e) Total: 15 formado com duas medidas iguais e uma diferente. A diferente deverá ficar no meio.

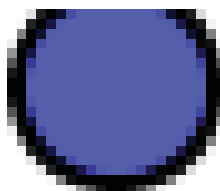
Régua	Representação gráfica	Análises
		() _____ () _____ () _____

Bom estudo ☺

APÊNDICE G - TAREFA DE ESTUDO - GEOPLANO E MALHA PONTILHADA

	Operações aritméticas Geoplano e malha quadriculada - 6º ano	Código: _____	
---	--	---------------	---

- 1) Com o geoplano que está na sua mesa, elabore com o fio de lã um caminho (C) de doze unidades (cada unidade usando dois pontinhos) na vertical e horizontal. Desenhe a sua imagem na malha quadriculada abaixo:



- a) Faça a representação gráfica da sua imagem com a medida:



- b) Se a medida utilizada fosse: _____, como seria a representação gráfica?



- c) Existe outra medida para ser utilizada na contagem da imagem que você construiu? Elabore a representação gráfica da sua medida:





- d) Você pensou em outra medida para ser utilizada na contagem da imagem que você construiu? Elabore a representação gráfica da sua medida:



- e) Quais análises você pode elaborar a partir das representações gráficas que você construiu?

() _____ () _____ () _____
 () _____ () _____ () _____

2) Analise as seguintes imagens:

Imagem	Quantos  tem na imagem?	Quantos tem na imagem?	Quantas vezes repete na imagem?	As medidas dos lados são iguais? Sim ou Não?	Quais são as medidas dos lados?	Qual é o formato total da imagem? Quadrada ou retangular?
						

3) Represente em forma gráfica o cálculo para a **área das regiões quadradas**:



Imagem	Represente graficamente utilizando  como medida	Qual o cálculo da representação gráfica?
		



Imagem	Represente graficamente utilizando  medida	Qual o cálculo da representação gráfica?
		






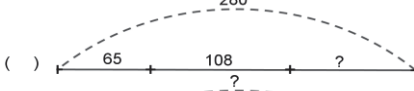
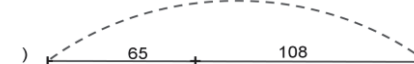
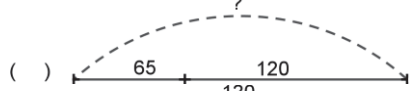
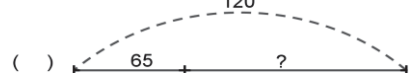
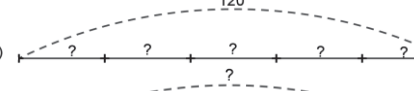
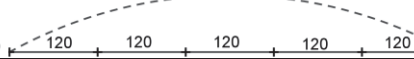
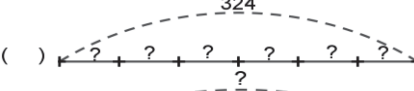
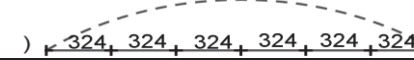
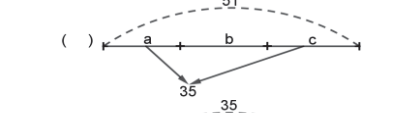
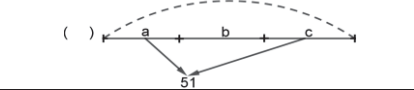
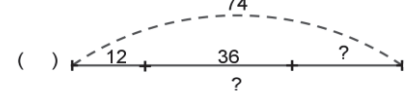
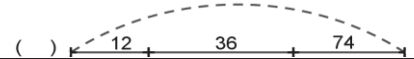
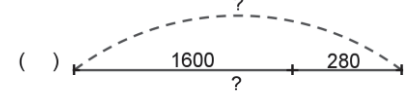
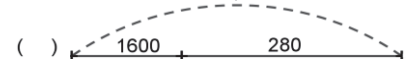
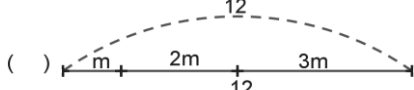
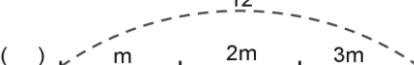
Imagem	Represente graficamente utilizando  medida	Qual o cálculo da representação gráfica?
		


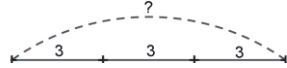
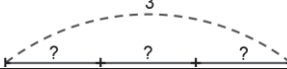
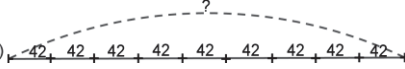
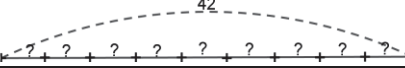
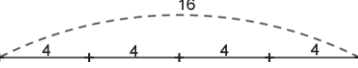
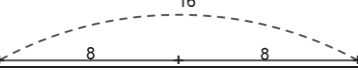
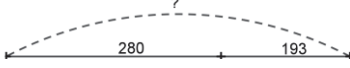
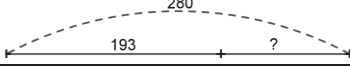
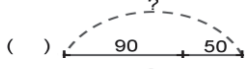
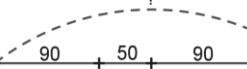
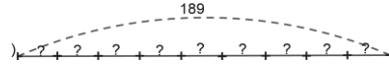
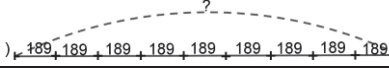
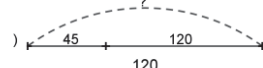

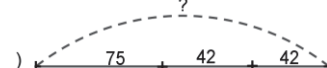
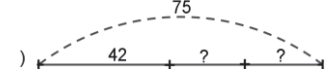
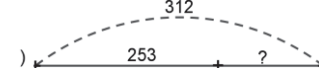
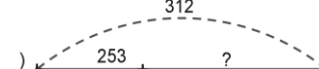
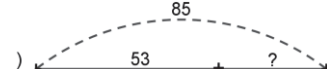
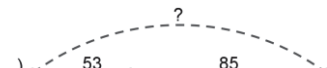
Imagem	Represente graficamente utilizando  como medida	Qual o cálculo da representação gráfica?

APÊNDICE H - TAREFA DE ESTUDO - PROBLEMAS



	Operações aritméticas Problemas com representação gráfica - 6º ano	Código: _____	
---	---	---------------	---

- 1) Cada problema está organizado com os dados na representação gráfica. Marque com (x) a opção adequada e em seguida resolva:

Problema	Representação gráfica	Operação
Tinha R\$ 280,00. Emprestei R\$ 65,00 para a Ana e R\$ 108,00 para a Carla. Sobrou quanto para mim?	<div style="text-align: center;">280</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
Marcos conseguiu 65 das 120 figurinhas para completar seu álbum da Copa do Mundo. A quantidade de figurinhas que Marcos precisa é de:	<div style="text-align: center;">?</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
Ana tem 120 cm de fita azul. Se ela cortar em cinco pedaços iguais, qual será a medida de cada pedaço?	<div style="text-align: center;">120</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">?</div> x 6 = 324	<div style="text-align: center;">324</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
Se $a+b+c=51$ e $a+c=35$, então o valor de b é:	<div style="text-align: center;">51</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
Juliana foi até a papelaria e comprou um caderno de R\$ 12,00, um estojo de canetinhas por R\$ 36,00 e mais um livro. A compra foi de R\$ 74,00. Qual o valor do livro?	<div style="text-align: center;">74</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
Corri 1600 metros ontem. Hoje corri mais 280 metros que no dia anterior. Quantos metros eu corri neste final de semana?	<div style="text-align: center;">?</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	
João distribuiu doze reais para seus três sobrinhos. O segundo ganhou o dobro do primeiro e, o terceiro ganhou o triplo do primeiro. Quanto cada um ganhou?	<div style="text-align: center;">12</div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div> <div style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/>  </div>	

	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Um trem de 9 vagões transporta 42 pessoas sentadas em cada vagão. Quantas pessoas o trem transporta nestas condições?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Uma região quadrada foi preenchida por dezesseis quadradinhos de 1cm^2. Qual é a medida do comprimento e da largura dessa região quadrada?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Marcelo viajou com sua família. Deverão percorrer 280 Km. Ao percorrerem 193 Km pararam para lanchar. Quantos quilômetros ainda faltam para chegar?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Um campo de futebol tem: 90 metros de comprimento e 50 metros de largura. Se uma pessoa der uma volta completa nesse campo, quanto ela irá andar?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Um teatro possui 189 poltronas. As poltronas foram organizadas em 9 fileiras. Quantas poltronas há em cada fileira?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p><input type="text"/> - 45 = 120</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Lúcia fez uma compra para pagar em duas formas de pagamento: R\$ 75,00 de entrada e mais duas prestações de R\$ 42,00 cada. Qual foi o valor total da compra?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>253 + <input type="text"/> = 312</p>	<p>() </p> <p>() </p>	
<p>Lucas estava jogando videogame e tinha 85 pontos na primeira fase do jogo. Na segunda fase foi derrotado e seus pontos foram para 53. Quantos pontos ele perdeu nesta fase do jogo?</p>	<p>() </p> <p>() </p>	

APÊNDICE I - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

	<p style="text-align: center;">Operações aritméticas</p> <p style="text-align: center;">6° ano</p>	<p style="text-align: center;">Código:</p> <p style="text-align: center;">_____</p>	
---	--	---	---

1) Marina estava jogando videogame e marcou 73 pontos na primeira fase. Na segunda ela marcou 59. Quantos pontos ela tem ao todo?

6) A quadra de esporte da escola tem 12 metros de comprimento e 5 metros de largura. Se um aluno deu uma volta completa, quantos metros ele andou?

2) O professor Luís tinha 91 livros. Resolveu doar alguns livros para a escola onde trabalha e ficou com 37. Quantos livros ele doou?

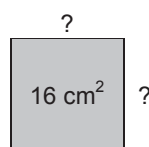
7) A turma do sexto ano tem trinta e seis alunos. A professora de Geografia quer formar nove equipes. Quantos alunos haverá em cada equipe?

3) Luciana comprou um caderno de 200 folhas e quer usar para quatro matérias. Quantas folhas ela poderá usar para cada disciplina?

8) Paulo pagou por mês 478 reais até completar o valor do computador de 2868 reais. Em quantos meses Paulo completou o valor do computador?

4) Quantos pontos há na figura? Apresente a resposta como uma *multiplicação*.

9) Qual é a medida do lado da região quadrada para que seja completada por dezesseis quadradinhos de 1 cm^2 ?



5) Pedro pagou uma compra de R\$ 8,25 com uma nota de R\$ 10,00 e recebeu de troco moedas de R\$ 0,25. Quantas moedas ele recebeu?

10) Lucas andou 22 Km de bicicleta a mais que seu amigo que andou 35 Km. Quantos Km Lucas andou de bicicleta?

11) Sônia foi ao mercado e comprou uma caixa de sabão em pó por R\$ 16,00, um shampoo por R\$ 19,00 e um pacote de açúcar. A compra foi de R\$ R\$ 48,00. Qual o preço do pacote de açúcar?

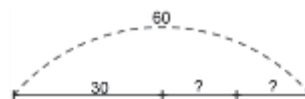
12) Douglas e sua família estavam viajando e pararam para almoçar. Douglas verificou que já viajaram 165 Km. Após almoçarem, teriam 83 Km até chegar ao destino. Qual a distância total da viagem?

13) Um celular custa R\$ 980,00. A loja oferece o seguinte pagamento: uma entrada de R\$ 400,00 e o restante em duas prestações. Qual é o valor de cada prestação?

14) O auditório de uma escola tem a capacidade para 180 pessoas sentadas. Tem nove fileiras de cadeiras. Quantas cadeiras têm em cada fileira?

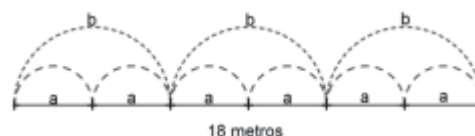
15) Camila comprou quatro chocolates do mesmo preço e pagou com uma nota de R\$ 20,00 reais. Qual foi o preço de cada chocolate se ela recebeu R\$ 8,00 de troco?

16) Qual é o valor da medida indicada?



17) Se 18 metros forem separados como é mostrado no desenho, qual é o tamanho da distância:

a= _____ e b= _____



18) Qual é o valor que está faltando?

$$258 + \boxed{} = 320$$

19) Gabriel tinha uma quantia e gastou R\$ 30,00 reais ficando com R\$ 45,00 reais na carteira. Quanto ele tinha antes de gastar?

$$\boxed{} - 30 = 45$$

20) Um dia tem vinte e quatro horas. Quantas horas serão ao total se forem 5 dias? Marque com (x) a alternativa correta e após calcule:

